数値計算法

工学院大学　情報工学科

長嶋　秀世

数値計算法　とは

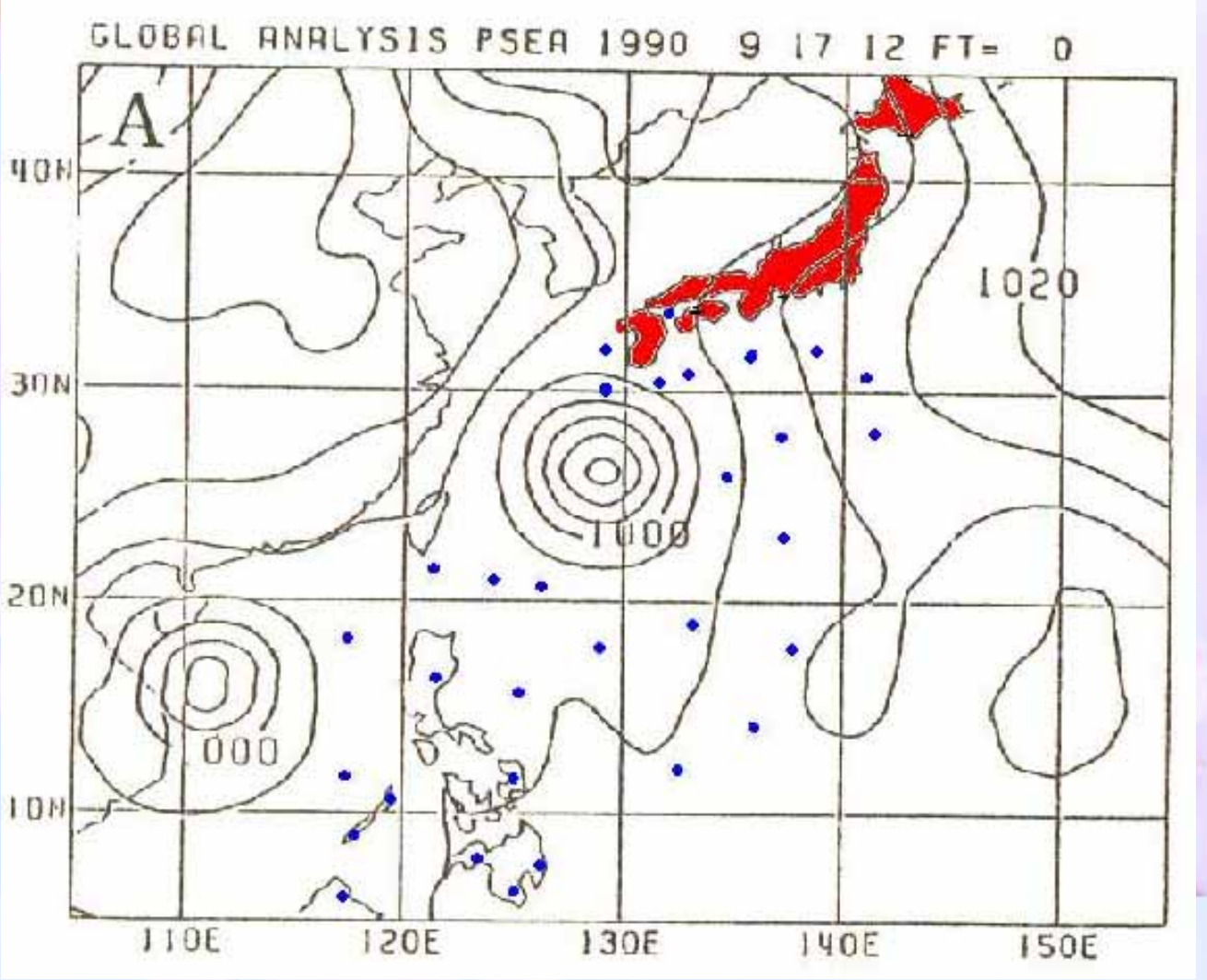
コンピュータで関数を計算する

コンピュータで微分や積分をする

$$\int_{x_0}^{x_0+3h} f(x)dx = \frac{3}{8}h[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3]$$

数値計算法が使われるところ

コンピュータによる天気予報



天気予報:数値予報

物理学の方程式

↓

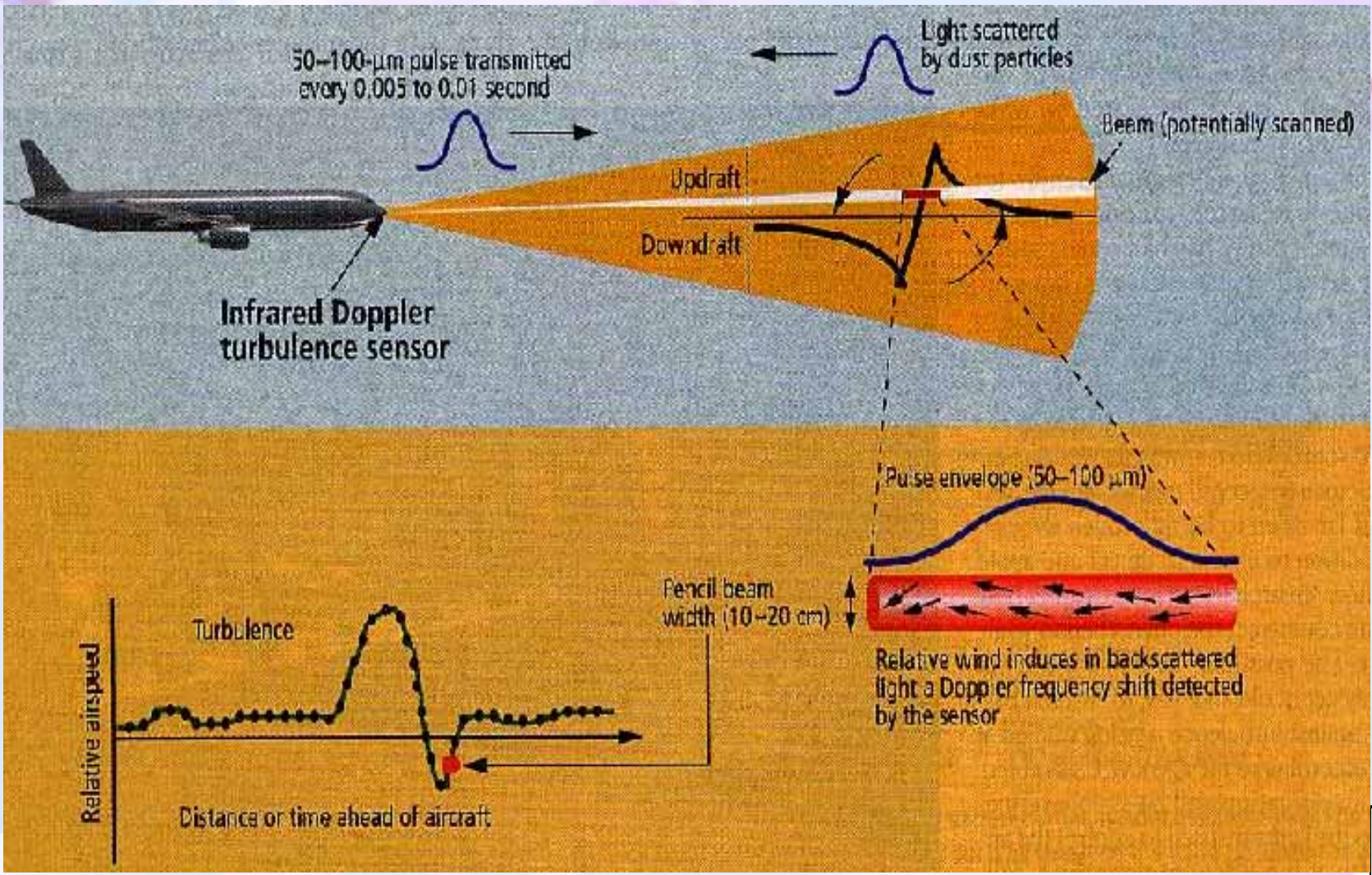
風や気温などの時間変化
スーパーコンピュータで計算

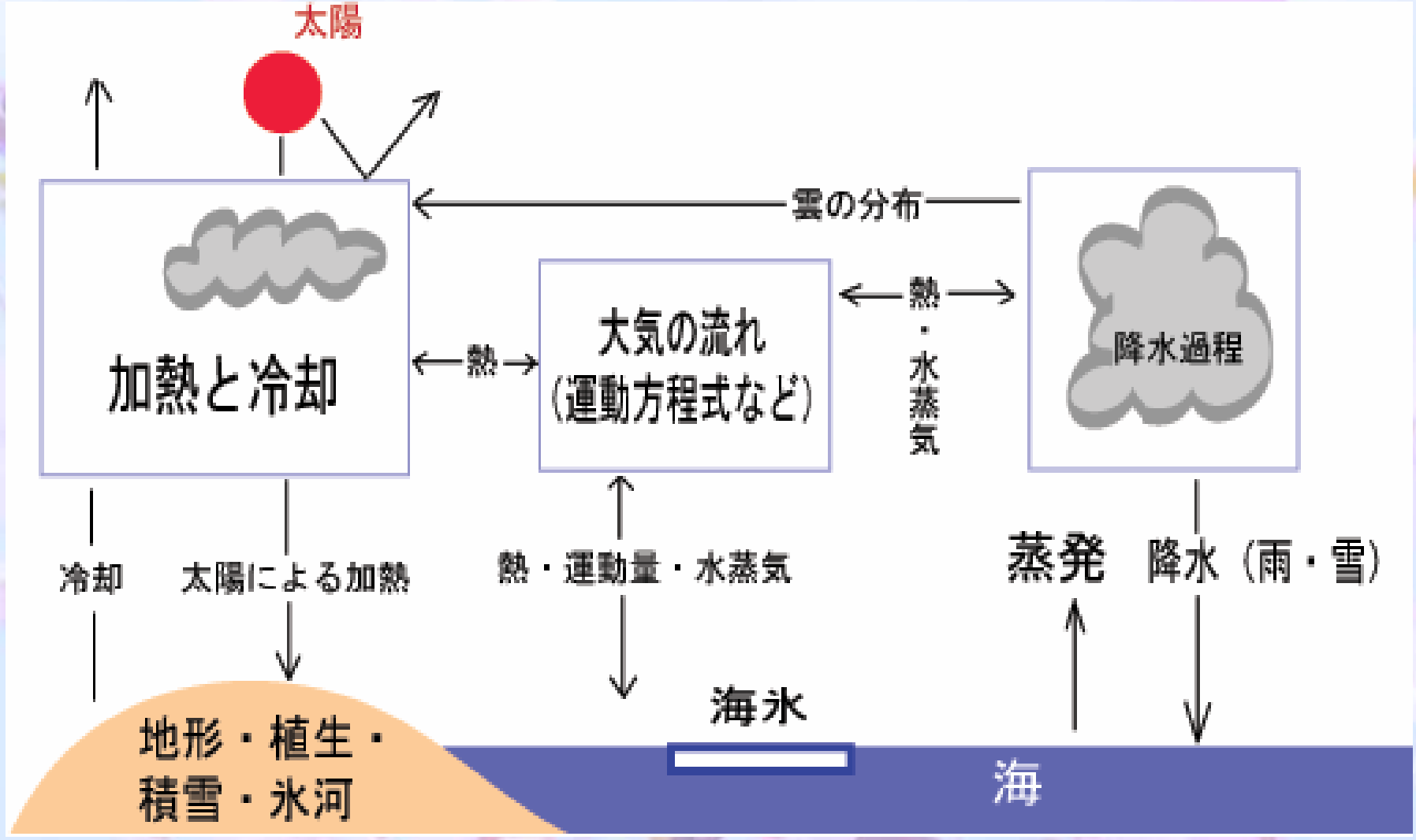
↓

将来の大気の状態を予測

数値計算法が使われるところ

コンピュータによる天気予報





http://www.jma.go.jp/JMA_HP/jma/index.html

数値予報を行う手順

規則正しく並んだ格子で大気を細かく覆う

↓

一つ一つの格子点の気圧、気温、風などの値

↓

スーパーコンピュータで計算

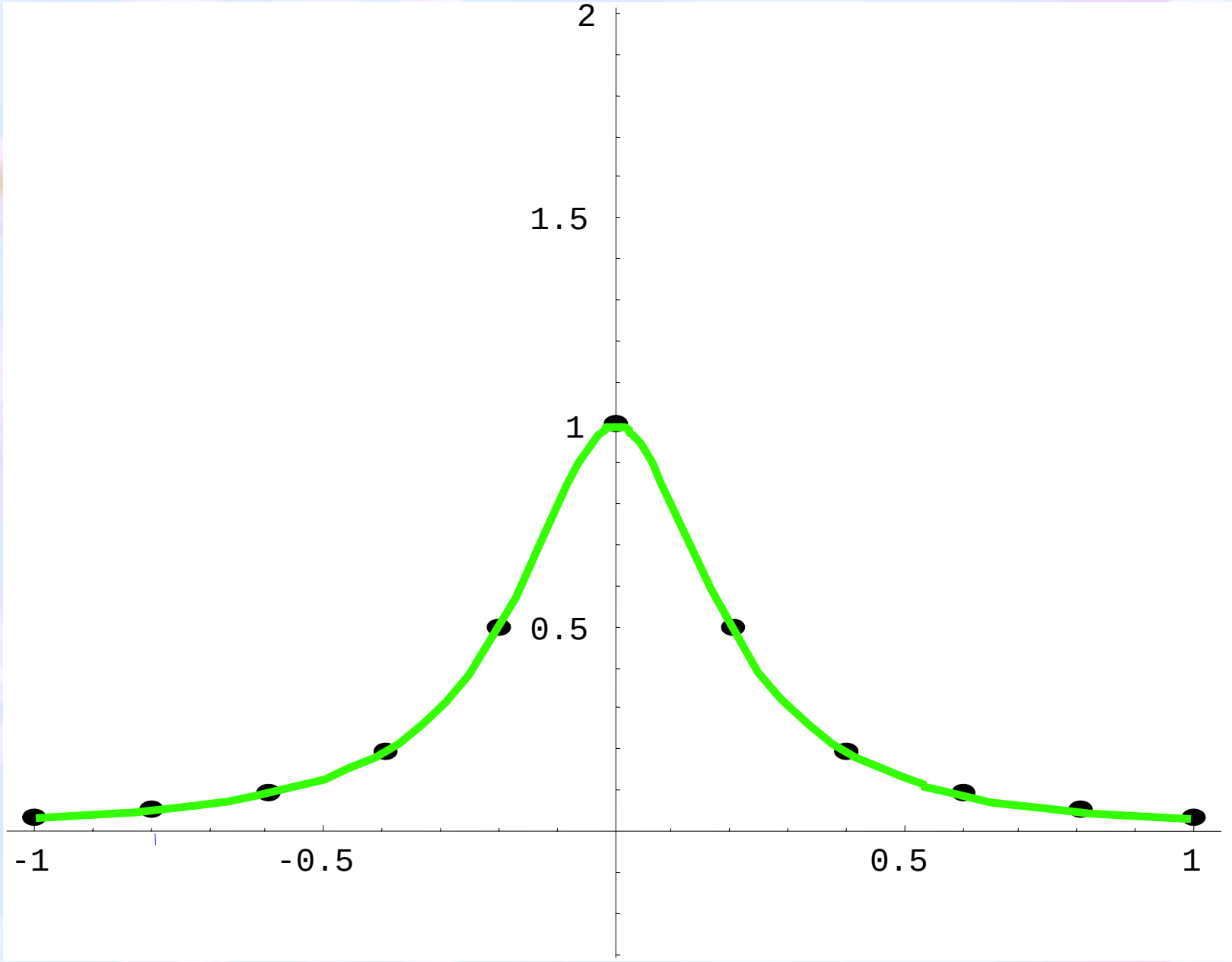
↓

未来の気象状況の推移を予測

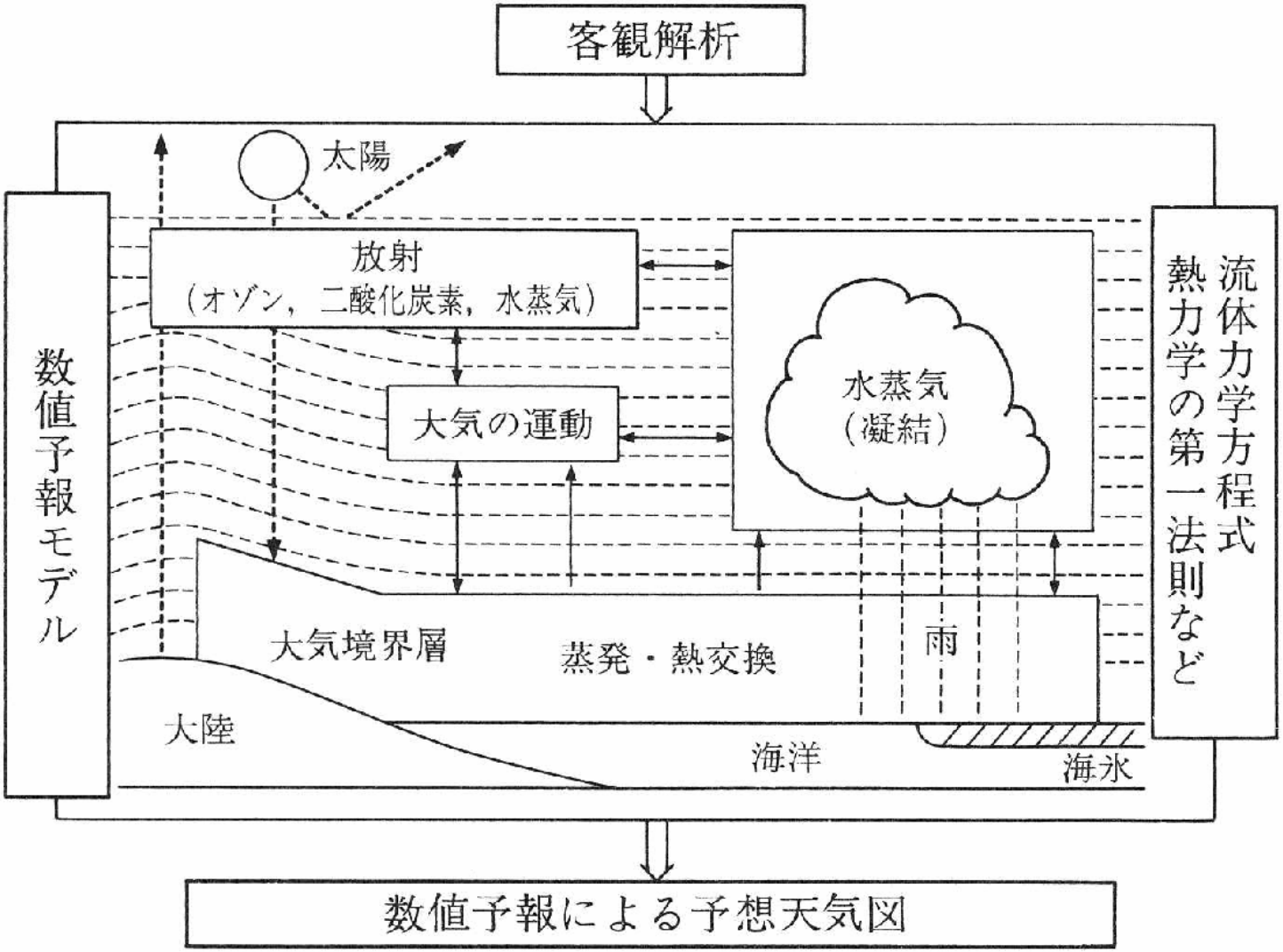
$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta_i$$

$$rot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}$$

拡張したアンペアの法則:微分方程式


2
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0.5
1

数値予報モデルの仕組み



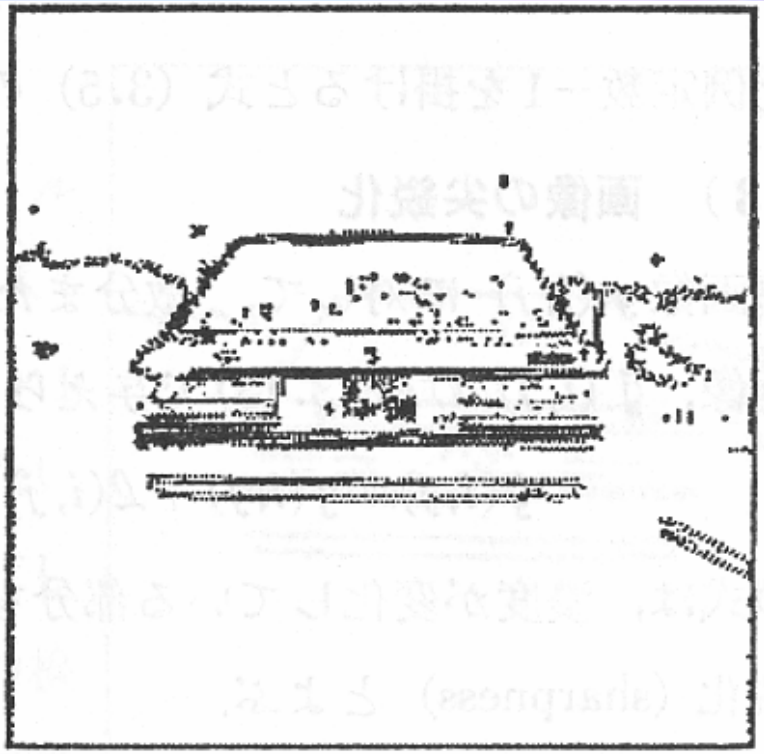
画像処理

雑音を含む原画像

平滑化画像

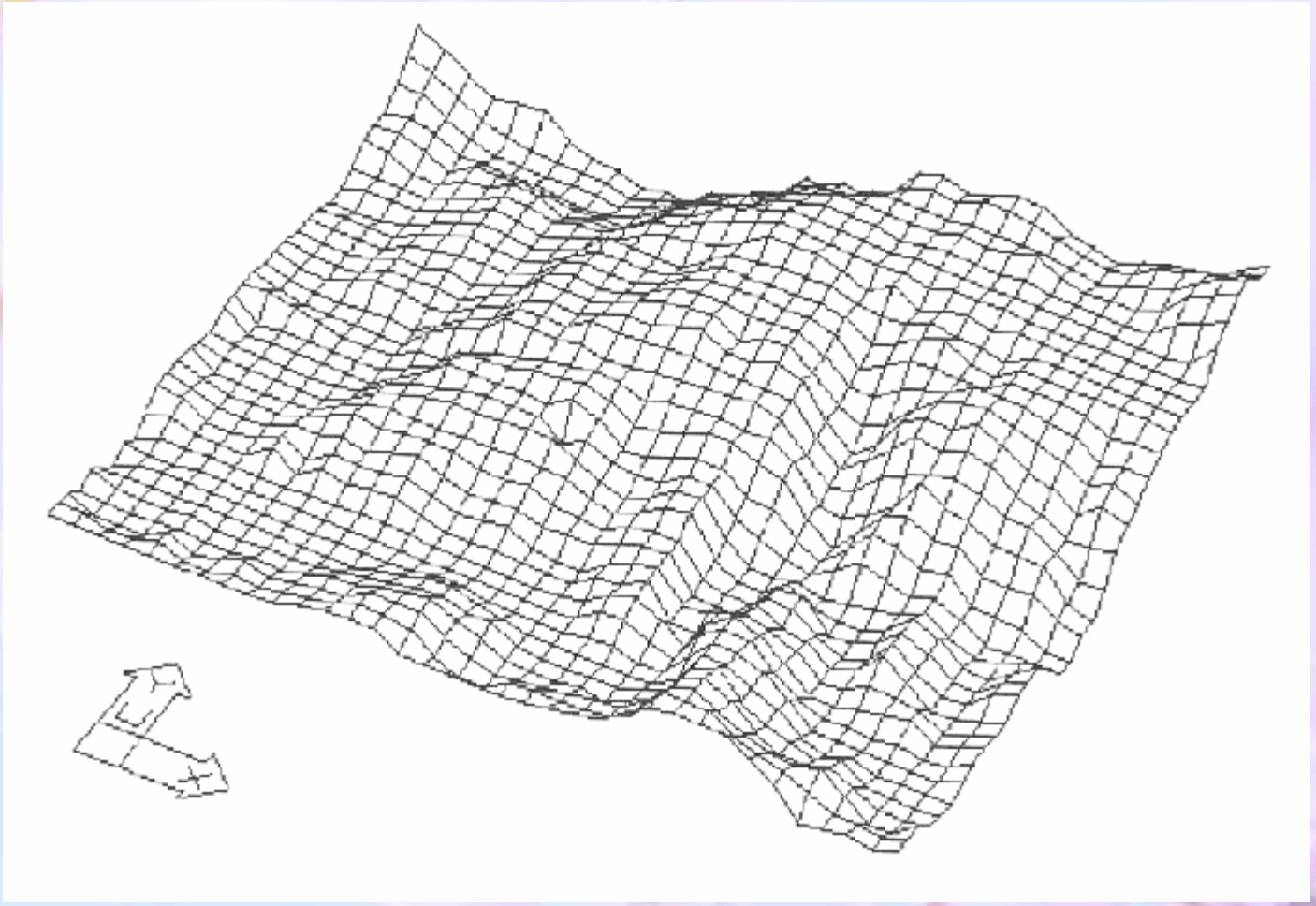
画像処理

原画像



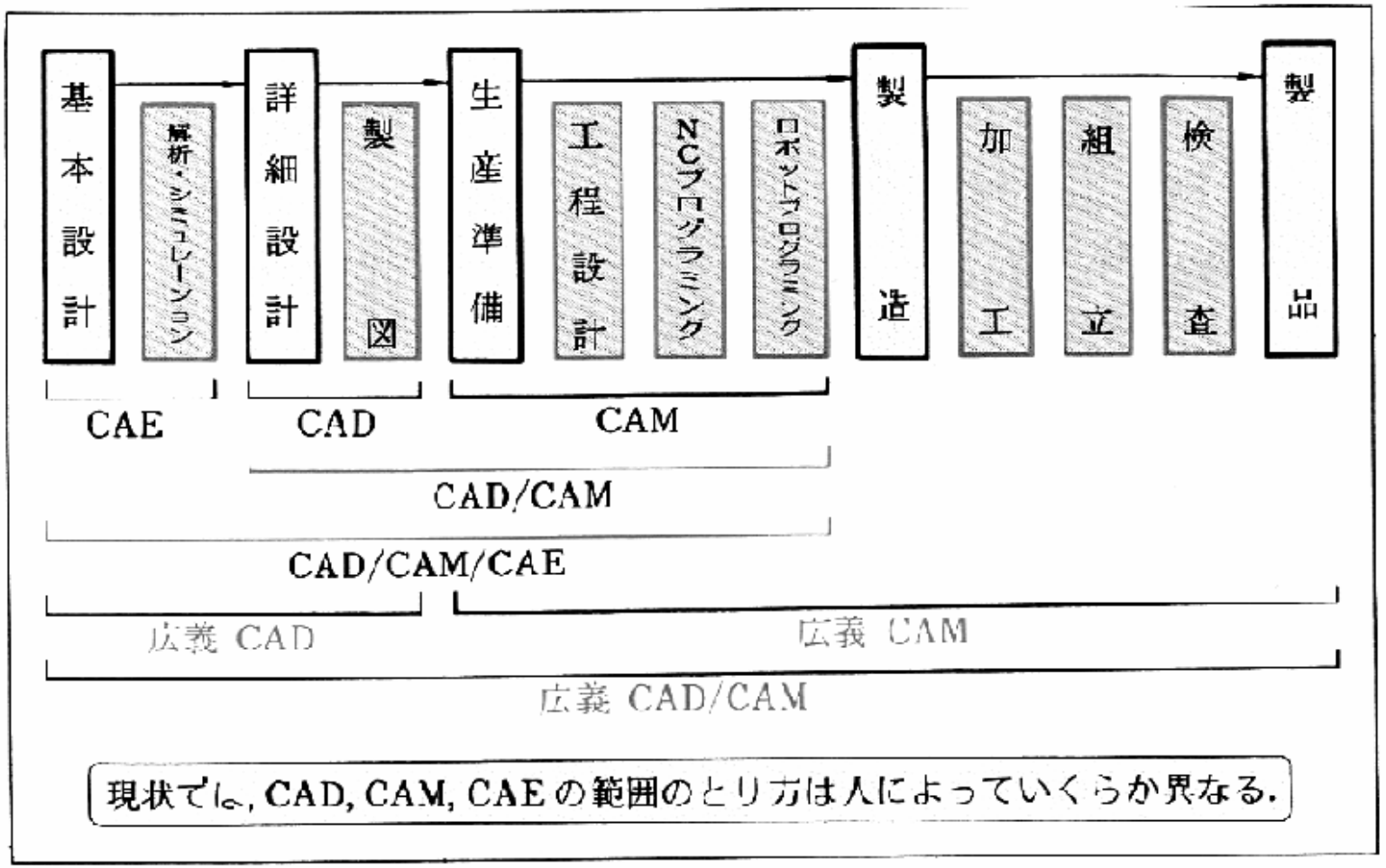
ラプラッシァン操作の2値画像

Computer Graphics



3次元表示画像

CAD CAM CAE



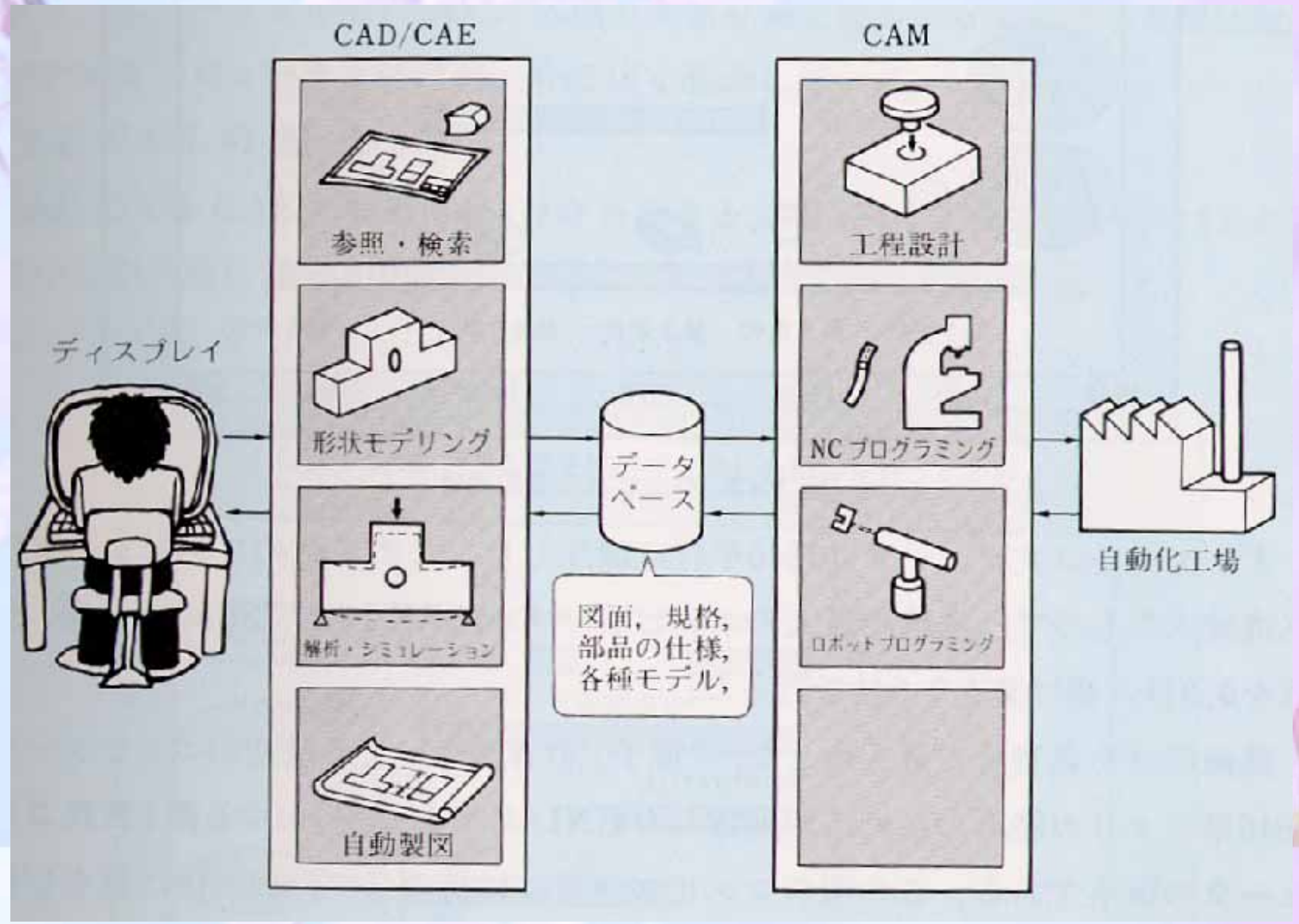
Computer Aided Design

Numerical Control

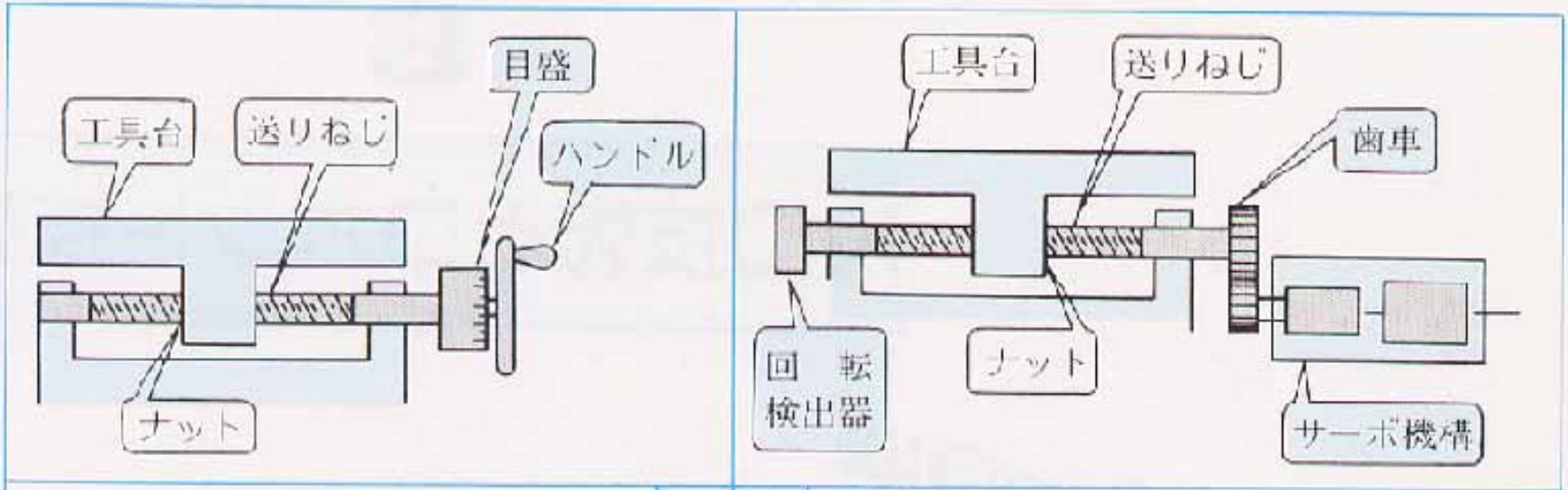
Computer Aided Manufacturing

Computer Aided Engineering

CAD CAM CAE


CAD/CAE
CAM
参照・検索
形状モデリング
解析・シミュレーション
自動製図
ディスプレイ
データベース
図面，規格，
部品の仕様，
各種モデル，
工程設計
NCプログラミング
ロボットプログラミング
自動化工場

Numerical Control



手動の場合の送り機構 a b NCの場合の送り機構

数値計算法が使われるところ

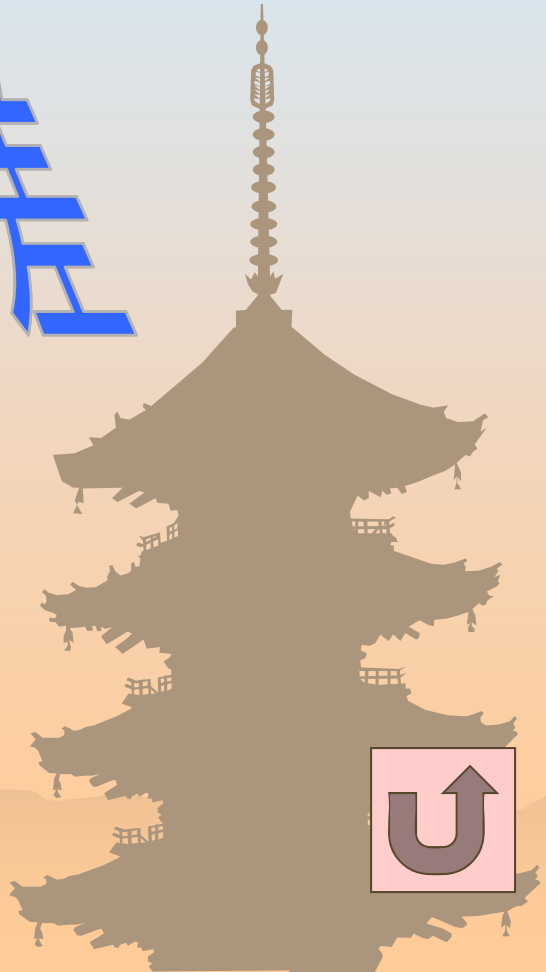
天気予報　経済予測　迎撃ミサイル

半導体の動作解析　回路設計　道路の混雑予測

ダムやビルの強度計算　　分子モデルの計算

CG　NC　CAD

第1章 数値計算法と誤差



第1章 数値計算法と誤差

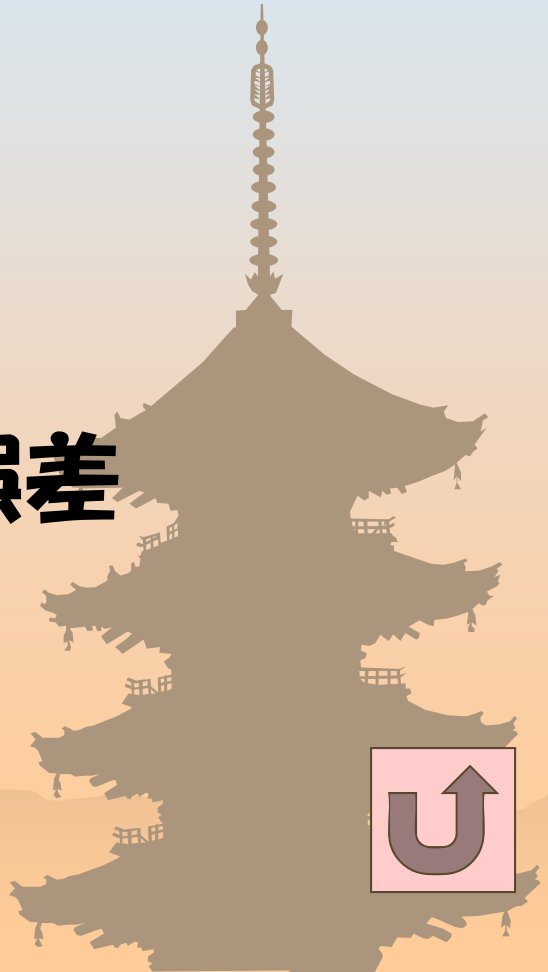
1.1 数値計算法

1.2 数値計算における誤差

1.2.1 数値計算の誤差

1.2.2 絶対誤差と相対誤差

1.2.3 誤差の伝播

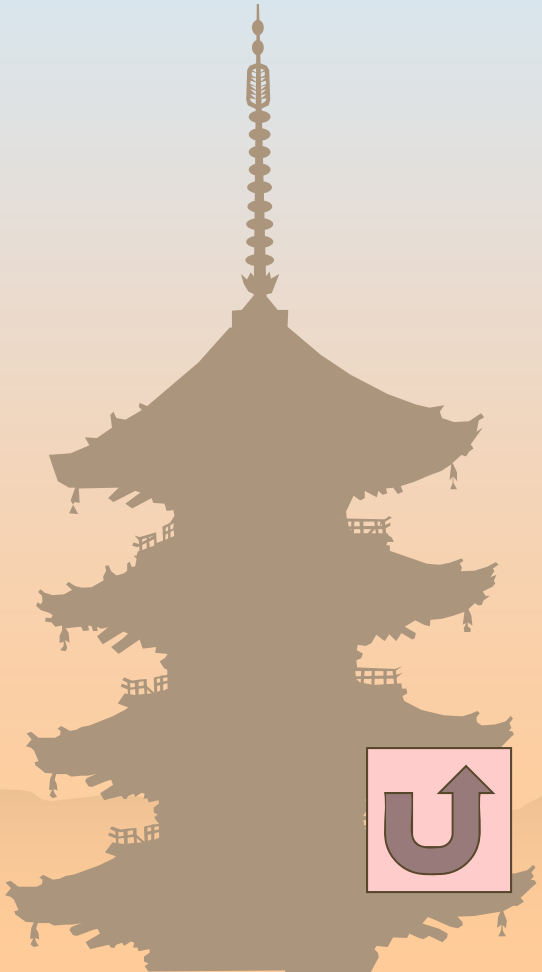


1.1 数値計算法

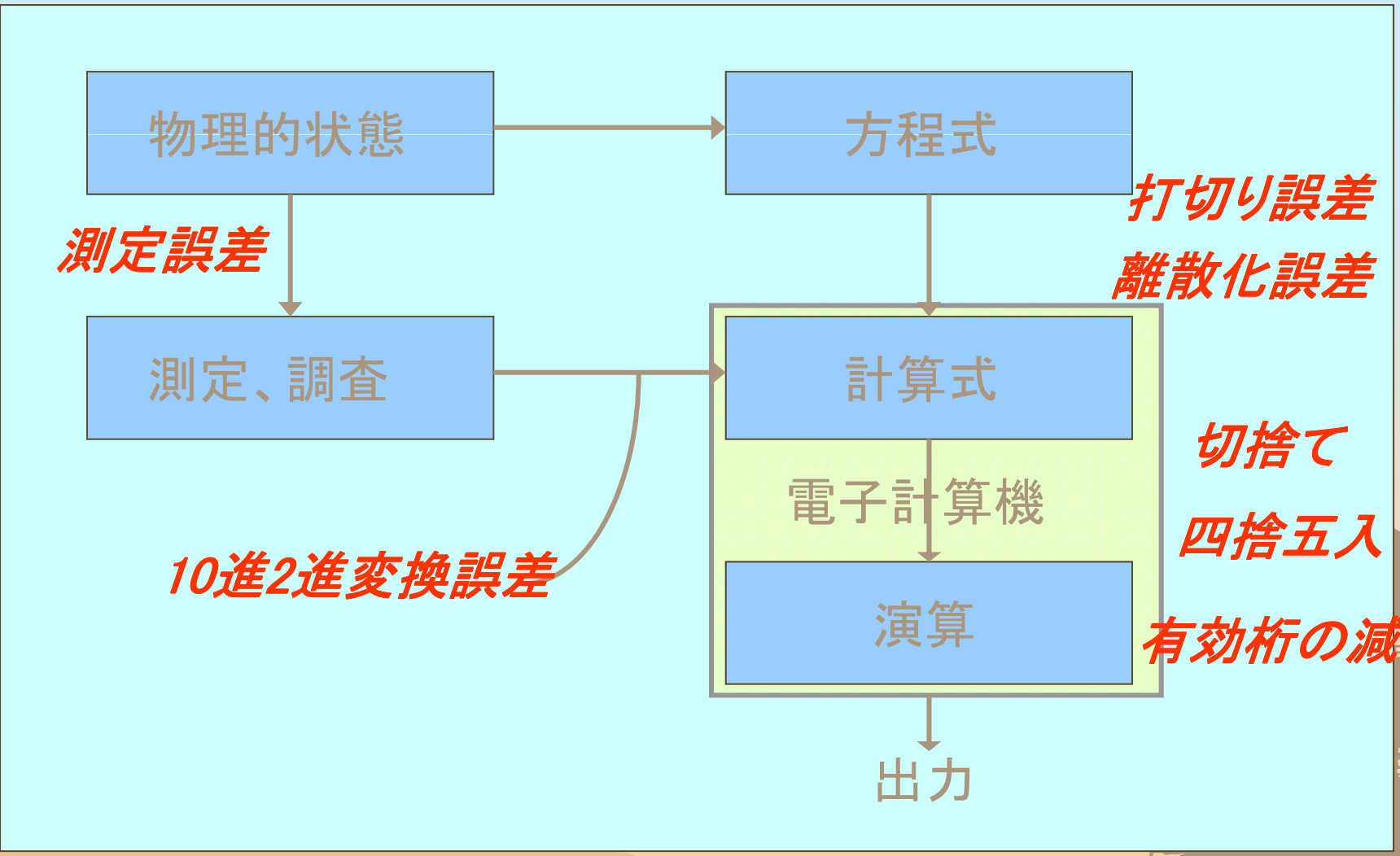
数値計算法の達人

計算時間を少なく

誤差を小さく



1.2.1 数値計算の誤差



桁落ち

有効桁の減少

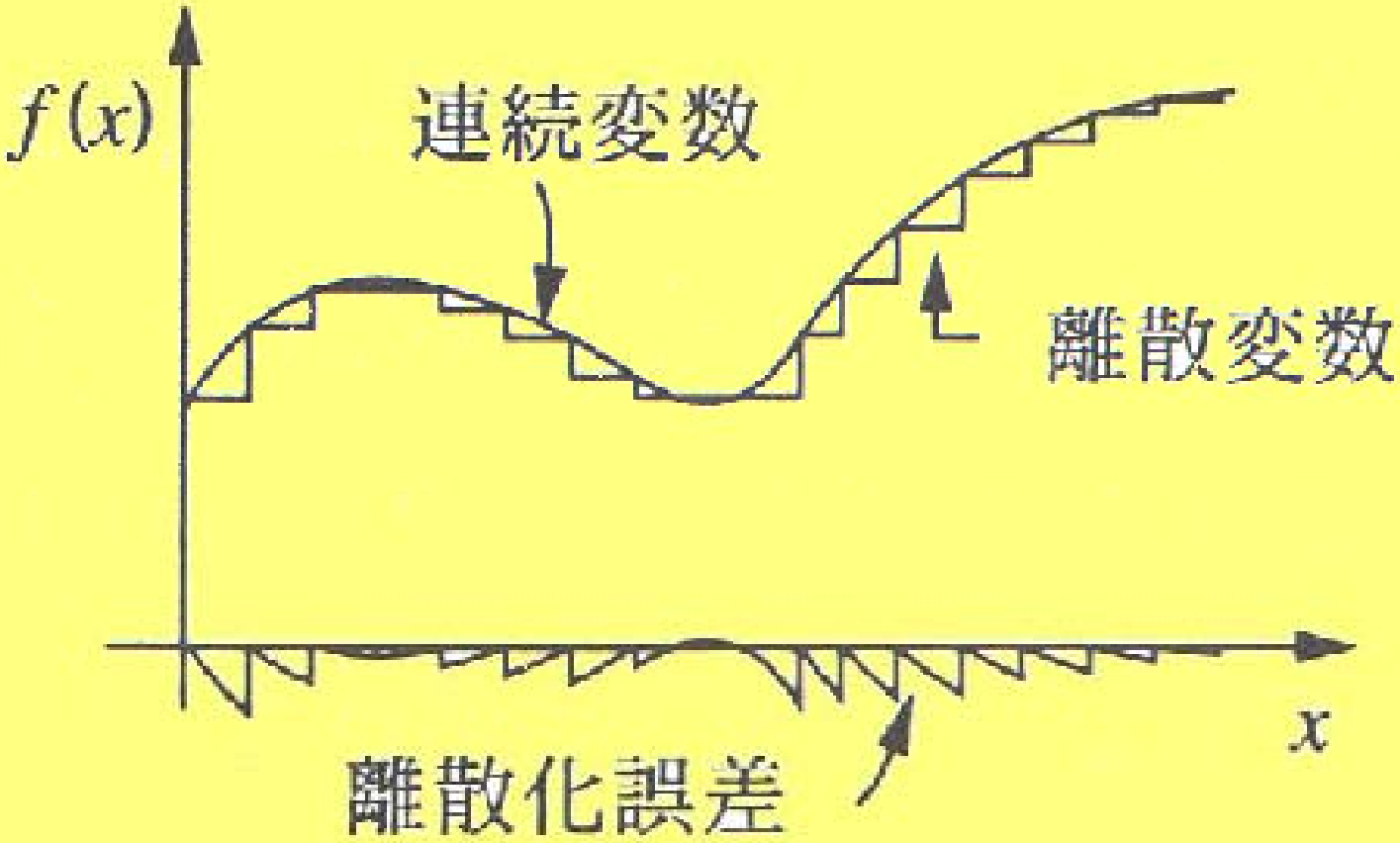
打ち切り誤差

ここで打ち切る.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} \cdots\cdots$$

ここから以降は打ち切り誤差となる

離散化誤差



丸め誤差

$A = 3.1415|9265$

四捨五入（丸め）による誤差

$A^{+} = 3.1416$

桁落ち

$A=1.23456$　　有効数字 6 桁

$B=1.23421$　　有効数字 6 桁

$C=A-B=0.00035=3.5\times10^{-4}$　　有効数字 2 桁

1.2.2 絶対誤差と相対誤差

絶対誤差　$e = X - x$

X：真値　x：近似値

Xの存在範囲　$x - \varepsilon \leqq X \leqq x + \varepsilon$

e：誤差限界

相対誤差　$E_R = \dfrac{X - x}{X} = \dfrac{e}{X}$

X は未知であるが ε が解れば X の存在範囲を知ることが出来る

Xが小さいときは相対誤差

1.2.3 誤差の伝ぱん(1)

2数の和の誤差

$$e_{a+b} \leqq |e_a| + |e_b|$$

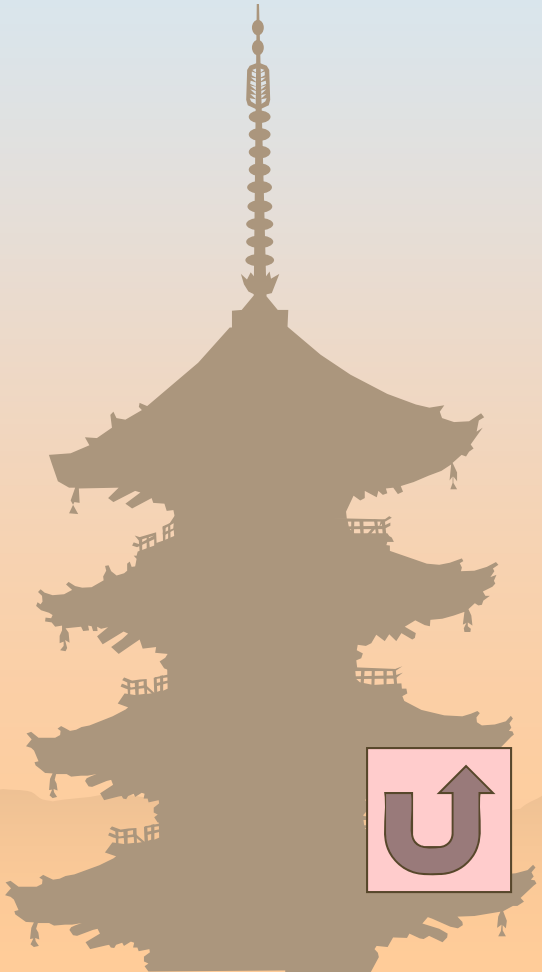
$$e_{a+b} = (X_a + X_b) - (x_a + x_b)$$

$$= (X_a - x_a) + (X_b - x_b)$$

$$= e_a + e_b$$

$$e_{a+b} \leqq |e_a| + |e_b|$$

X_a, X_b : 真値　　x_a, x_b : 近似値



1.2.3 誤差の伝ぱん（２）

2数の差の誤差

$$e_{a-b} \leqq |e_a| + |e_b|$$

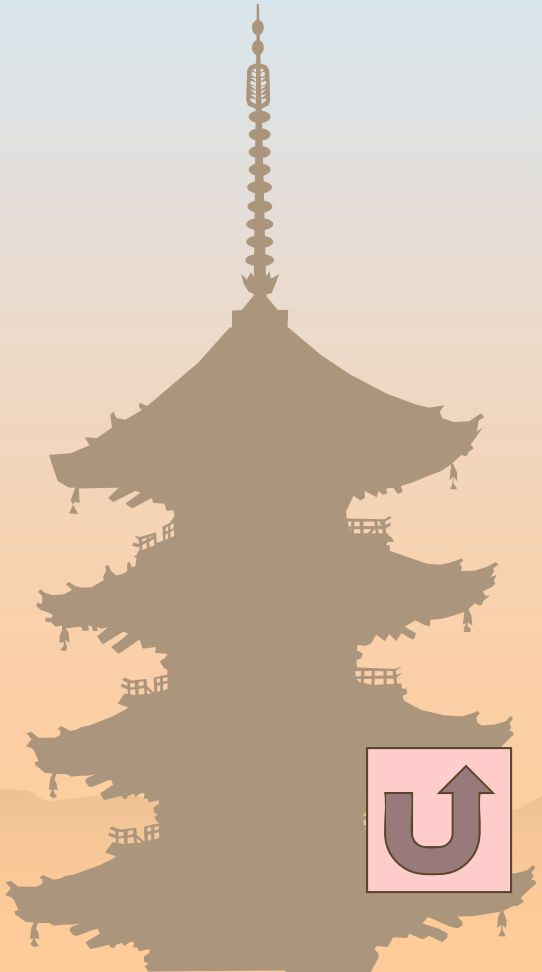
$$e_{a-b} = (X_a - X_b) - (x_a - x_b)$$

$$= (X_a - x_a) - (X_b - x_b)$$

$$= e_a - e_b$$

$$e_{a-b} \leqq |e_a| + |e_b|$$

X_a, X_b : 真値　　x_a, x_b : 近似値



1.2.3 誤差の伝ぱん（３）

2数の積の誤差

$$E_{ab} \leqq |E_a| + |E_b|$$

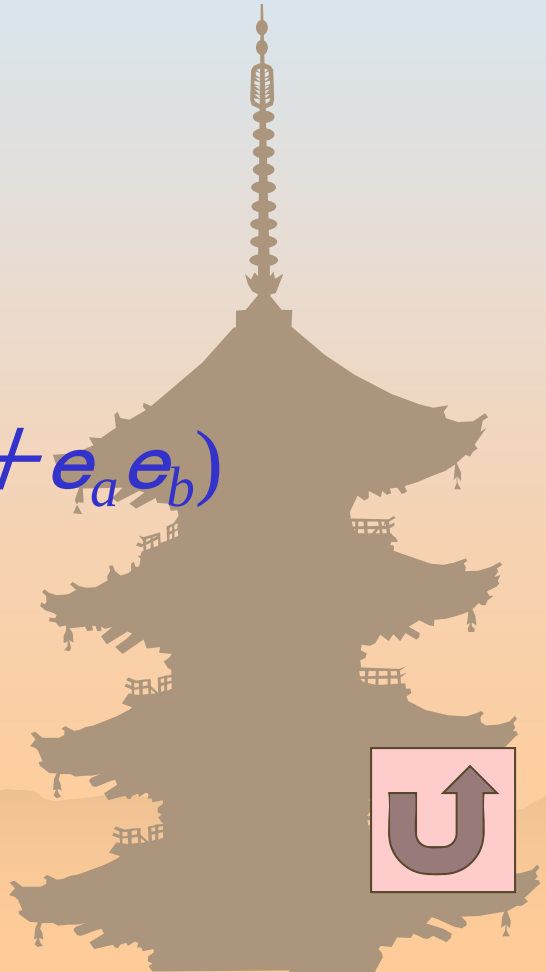
$$e_{ab} = (X_a X_b) - (x_a x_b)$$

$$= (X_a X_b) - (X_a - e_a)(X_b - e_b)$$

$$= (X_a X_b) - (X_a X_b - X_a e_b - e_a X_b + e_a e_b)$$

$$= e_b X_a + e_a X_b - e_a e_b$$ 小さいので省略する

$$E_{ab} = \frac{e_a X_b + e_b X_a - e_a e_b}{X_a X_b} \fallingdotseq \frac{e_a}{X_a} + \frac{e_b}{X_b}$$



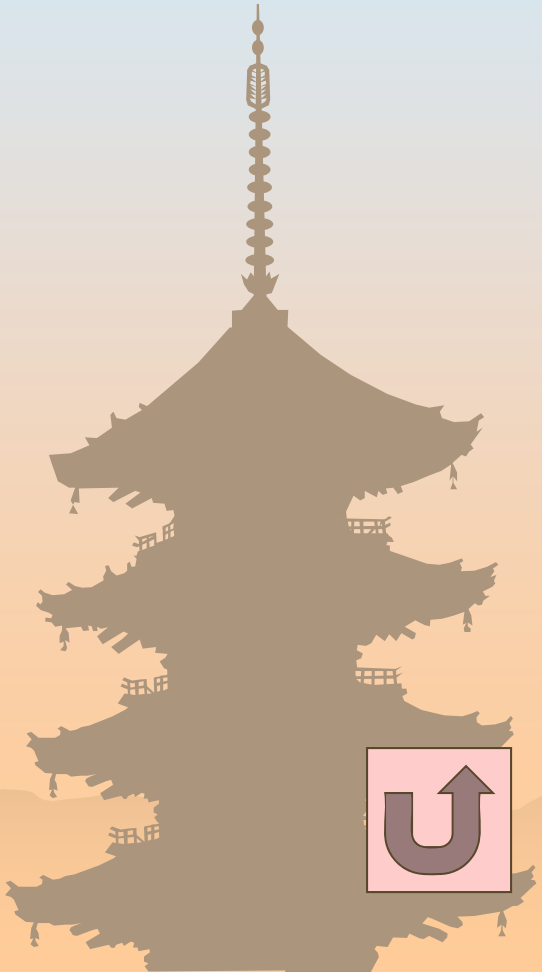
1.2.3 誤差の伝ぱん（４）

2数の商の誤差

$$E_{a/b} \leqq |E_a| + |E_b|$$

$$e_{a/b} = \frac{X_a}{X_b} - \frac{x_a}{x_b} = \frac{X_a}{X_b} - \frac{X_a - e_a}{X_b - e_b}$$

$$= \frac{X_a X_b - X_a e_b - X_b X_a + X_b e_a}{X_b (X_b - e_b)}$$

$$\frac{e_{a/b}}{X_a / X_b} = -\frac{e_b}{X_b - e_b} + \frac{X_b}{X_b - e_b} \times \frac{e_a}{X_a}$$

$$E_{a/b} = -E_b + E_a$$