

# 第1章 数値計算法と誤差



## 第1章 数値計算法と誤差

### 1.1 数値計算法

### 1.2 数値計算における誤差

#### 1.2.1 数値計算の誤差

#### 1.2.2 絶対誤差と相対誤差

#### 1.2.3 誤差の伝播



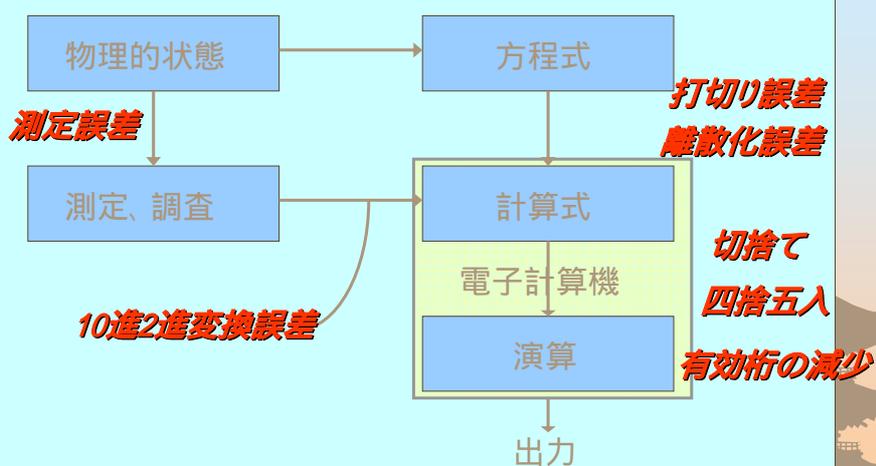
## 1.1 数値計算法

### 数値計算法の達人

計算時間を少なく  
誤差を小さく



### 1.2.1 数値計算の誤差



桁落ち

有効桁の減少



# 打ち切り誤差

この項で打ち切る。

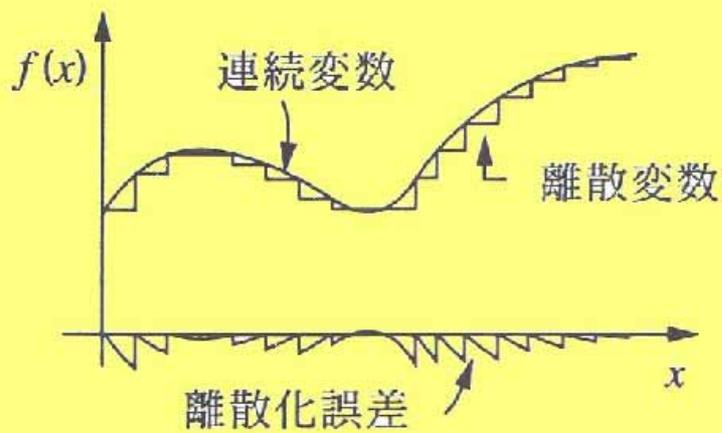
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} \dots$$

第7項

ここから以降は打ち切り誤差となる



# 離散化誤差



## 丸め誤差

$$A = 3.1415\dot{9}265$$



四捨五入（丸め）による誤差

$$A^+ = 3.1416$$



## 桁落ち

$$A = 1.23456 \quad \text{有効数字 6 桁}$$

$$B = 1.23421 \quad \text{有効数字 6 桁}$$

$$C = A - B = 0.00035 = 3.5 \times 10^{-4} \quad \text{有効数字 2 桁}$$



## 1.2.2 絶対誤差と相対誤差

絶対誤差  $e = X - x$

$X$  : 真値  $x$  : 近似値

$X$ の存在範囲  $x - \varepsilon \leq X \leq x + \varepsilon$   
 $e$  : 誤差限界

相対誤差  $E_R = \frac{X - x}{X} = \frac{e}{X}$

$X$ は未知であるが  
 $\varepsilon$ が解れば $X$ の存在  
範囲を知ることが  
出来る

$X$ が小さいときは  
相対誤差



## 1.2.3 誤差の伝ぱん(1)

2数の和の誤差

$$e_{a+b} = |e_a| + |e_b|$$

$$\begin{aligned} e_{a+b} &= (X_a + X_b) - (x_a + x_b) \\ &= (X_a - x_a) + (X_b - x_b) \\ &= e_a + e_b \end{aligned}$$

$$e_{a+b} = |e_a| + |e_b|$$

$X_a, X_b$  : 真値  $x_a, x_b$  : 近似値



### 1.2.3 誤差の伝ぱん ( 2 )

#### 2数の差の誤差

$$e_{a-b} = |e_a| + |e_b|$$

$$\begin{aligned} e_{a-b} &= (X_a - X_b) - (x_a - x_b) \\ &= (X_a - x_a) - (X_b - x_b) \\ &= e_a - e_b \end{aligned}$$

$$e_{a-b} = |e_a| + |e_b|$$

$X_a, X_b$ : 真値       $x_a, x_b$ : 近似値



### 1.2.3 誤差の伝ぱん ( 3 )

#### 2数の積の誤差

$$E_{ab} = |E_a| + |E_b|$$

$$\begin{aligned} e_{ab} &= (X_a X_b) - (x_a x_b) \\ &= (X_a X_b) - (X_a - e_a)(X_b - e_b) \\ &= (X_a X_b) - (X_a X_b - X_a e_b - e_a X_b + e_a e_b) \end{aligned}$$

$$= e_b X_a + e_a X_b - \underline{e_a e_b} \quad \text{小さいので省略する}$$

$$E_{ab} = \frac{e_a X_b + e_b X_a - e_a e_b}{X_a X_b} = \frac{e_a}{X_a} + \frac{e_b}{X_b}$$



### 1.2.3 誤差の伝ぱん ( 4 )

#### 2数の商の誤差

$$E_{a/b} = |E_a| + |E_b|$$

$$\begin{aligned} e_{a/b} &= \frac{X_a}{X_b} - \frac{x_a}{x_b} = \frac{X_a}{X_b} - \frac{X_a - e_a}{X_b - e_b} \\ &= \frac{X_a X_b - X_a e_b - X_b X_a + X_b e_a}{X_b (X_b - e_b)} \end{aligned}$$

$$\frac{e_{a/b}}{X_a / X_b} = - \frac{e_b}{X_b - e_b} + \frac{X_b}{X_b - e_b} \times \frac{e_a}{X_a}$$

$$E_{a/b} = - E_b + E_a$$

