第2章 差分法

第2章 差分法

2.1 差分

2.2 差分方程式

2.3 差分演算子

差分　とは

実数　f(x) が変数　x　に対し、等間隔　hで値を持つとき、

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

を　f(x) の差分という。

⊿:差分演算子

h　:階差

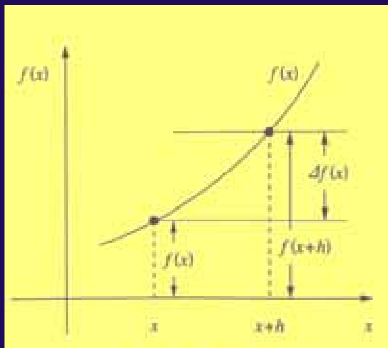

図 2.1　差分の概念

1階差分　$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

2階差分

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\left[\Delta f(x)\right]$$

$$= \Delta\left[f(x+h) - f(x)\right]$$

$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= \left[f(x+2h) - f(x+h)\right] - \left[f(x+h) - f(x)\right]$$

$$= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

3階差分

$$\Delta^3 f(x) = \Delta\left\{\Delta^2 f(x)\right\}$$

$$= \Delta\left\{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\right\}$$

$$= \Delta f(x+2h) - 2\Delta f(x+h) + \Delta f(x)$$

$$\begin{aligned} = &\left\{f(x+3h) - f(x+2h)\right\} \\ &- 2\left\{f(x+2h) - f(x+h)\right\} \\ &+ \left\{f(x+h) - f(x)\right\} \end{aligned}$$

$$^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

1階差分 $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

2階差分 $\Delta f^{2}(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$

3階差分

$$\Delta f^{3}(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

2項係数

$${}_nC_r$$

1階差分　$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

2階差分　$\Delta f^{2}(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$

3階差分

$$\Delta f^{3}(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)$$

n階差分

$$\Delta^{n} f(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} f(x+rh)$$

2項係数　$\binom{n}{r} = {}_{n}C_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

差分表

$$\Delta f^{3}(0) = \Delta^{2} f(1) - \Delta^{2} f(0)$$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^{2} f(x)$	$\Delta^{3} f(x)$
0	1			
		1		
1	2		4	
		5		0
2	7		4	
		9		
3	16			

関数　$f(x) = 2x^2 - x + 1$　の差分は？

差分間隔が1のときの差分

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

1階差分

$$\Delta f(x) = [2(x+1)$$

$$= 4x + 1$$

2階差分

$$\Delta^2 f(x) = [4(x+$$

$$= 4$$

3階差分

$$\Delta^3 f(x) = 4 - 4 = 0$$

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	1			
		1		
1	2		4	
		5		0
2	7		4	
		9		
3	1 6			

表 2.1　$f(x)=2x^2-x+1$ の差分表

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	1			
		1		
1	2		4	
		5		0
2	7		4	
		9		0
3	16		4	
		13		0
4	29		4	
		17		0
5	46		4	
		21		0
6	67		4	
		25		0
7	92		4	
		29		
8	121			

主な差分公式

$$(1)\quad \Delta c = 0 \qquad [c:\text{定数}]$$

$$(2)\quad \Delta x = h$$

$$(3)\quad \Delta\left[af(x)+bg(x)\right]= a\Delta f(x)+b\Delta g(x)$$

$$\Delta x = (x+h)-x = h$$

主な差分公式

$$(4)\quad \Delta\left[f(x)g(x)\right]= f(x+h)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta\left[f(x)g(x)\right] &= f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)\\ &\quad -f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)\\ &= f(x+h)\{g(x+h)-g(x)\}\\ &\quad +\{f(x+h)-f(x)\}g(x)\\ &= f(x+h)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)\end{aligned}$$

主な差分公式

$$(4)\quad \Delta\left[f(x)g(x)\right] = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$$
$$= g(x+h)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x)$$

$$\begin{aligned}\Delta\left[f(x)g(x)\right] &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \\ &\quad - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) \\ &= \{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) \\ &\quad + f(x)\{g(x+h) - g(x)\} \\ &= \Delta f(x)g(x+h) + f(x)\Delta g(x)\end{aligned}$$

$$(5)\quad \Delta\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x)}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x+h)g(x)}$$

$$(6) \quad \Delta a^{x} = a^{x+h} - a^{x}$$
$$= (a^{h} - 1)a^{x}$$

$$(7) \quad \Delta \sin(ax+b) = \sin\left[a(x+h)+b\right] - \sin(ax+b)$$

A B

$$= 2\sin\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{2}\cos\frac{a(x+h)+b+ax+b}{2}$$
$$= 2\sin\frac{ah}{2}\cos\left[a\left(x+\frac{h}{2}\right)+b\right]$$

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$(8) \quad \Delta \log_e x = \log_e(x+h) - \log_e x$$
$$= \log_e \frac{x+h}{x} = \log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$(9) \quad \Delta^{k}\left[f(x)g(x)\right] = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Delta^{k-j} f(x+jh)\Delta^{j} g(x)$$

$$\Delta\left[f(x)g(x)\right] = f(x+h)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x)$$

階乗関数とその差分

階乗関数

$$x^{(n)} = \underbrace{x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))}_{n\text{個}}$$

例）

$$7^{(4)} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

$$3^{(3)} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$\Delta x^{(n)} = \{(x+1)x\cdots(x-(n-2))\} - \{x(x-1)\cdots(x-(n-1))\}$$

$$= [(x+1)-(x-(n-1))]x(x-1)\cdots(x-(n-2))$$

$$= nx^{(n-1)}$$

$$\boxed{\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}} \qquad \boxed{[x^n]' = nx^{n-1}}$$