



2.2 差分方程式

n 階差分方程式

$$F(x, y(x), \Delta y(x), \Delta^2 y(x), \dots, \Delta^n y(x)) = g(x)$$

$g(x) = 0 \Rightarrow$ 同次差分方程式

$g(x) \neq 0 \Rightarrow$ 非同次差分方程式



$x \Rightarrow$ 離散的変数

$y(x) \Rightarrow$ 関数



簡単な差分方程式の解き方

$$(1) \quad y(x+1) - ay(x) = 0$$

$$y(x+1) = ay(x)$$

$$x = 0, \quad y(1) = ay(0)$$

$$x = 1, \quad y(2) = ay(1) = aay(0) = a^2 y(0)$$

$$x = 2, \quad y(3) = ay(2) = aa^2 y(0) = a^3 y(0)$$

$$y(x) = a^x y(0)$$

$$y(x) = ca^x$$

c : 定数





$$(\square) \quad y(x+1) - y(x) = b$$

$$y(x+1) = y(x) + b$$

$$x = 0 \quad , \quad y(1) = y(0) + b$$

$$x = 1 \quad , \quad y(2) = y(1) + b = y(0) + 2b$$

$$x = 2 \quad , \quad y(3) = y(2) + b = y(0) + 3b$$

$$y(x) = y(0) + xb$$



$$(\wedge) \quad y(x+1) - A(x)y(x) = 0$$

$$y(x+1) = A(x)y(x)$$

$$x = 0 \quad y(1) = A(0)y(0)$$

$$x = 1 \quad y(2) = A(1)y(1) = A(1)A(0)y(0)$$

$$x = 2 \quad y(3) = A(2)y(2) = A(2)A(1)A(0)y(0)$$

$$y(x) = A(x-1)A(x-2) \cdots A(1)A(0)y(0)$$

$$= y(0) \prod_{i=0}^{x-1} A(i)$$

乗積記号

$$A(x-1)A(x-2) \cdots A(1)A(0) = \prod_{i=0}^{x-1} A(i)$$



$$(\square) \quad y(x+1) - y(x) = B(x)$$

$$y(x+1) = y(x) + B(x)$$

$$x=0 \quad , \quad y(1) = y(0) + B(0)$$

$$x=1 \quad , \quad y(2) = y(1) + B(1) = y(0) + B(0) + B(1)$$

$$x=2 \quad , \quad y(3) = y(2) + B(2) = y(0) + B(0) + B(1) + B(2)$$

$$y(x) = y(0) + B(0) + B(1) + \cdots + B(x-2) + B(x-1)$$

$$= y(0) + \sum_{i=0}^{x-1} B(i)$$

総和記号



$$B(0) + B(1) + \cdots + B(x-2) + B(x-1) = \sum_{i=0}^{x-1} B(i)$$

線形1階差分方程式

$$y(x+1) - ay(x) = b^x P_n(x)$$

$$y(x) = ca^x + y^*(x)$$

$$y^*(x) = b^x Q_n(x) \quad (b \neq a)$$

$$y^*(x) = b^x x Q_n(x) \quad (b = a)$$

$$P_n(x) \Rightarrow 6x^n + 3x^{n-1} + \cdots + 2x - 7 \quad n \text{ 次多項式}$$

$$Q_n(x) \Rightarrow 2x^n - 5x^{n-1} + \cdots - 4x + 3 \quad n \text{ 次多項式}$$



例題4 $y(x+1) - 3y(x) = 2x - 5$ を解け。

同次方程式 $y(x+1) - 3y(x) = 0$ の解は $c3^x$

$$y(x) = c3^x + y^*(x) \quad \cdots \text{一般解}$$

$$y^*(x) = k_1x + k_2 \quad k_1, k_2 \Rightarrow \text{未定係数}$$

$$y(x) = c3^x + k_1x + k_2$$

$$\begin{aligned} y(x+1) - 3y(x) &= c3^{x+1} + k_1(x+1) + k_2 - 3(c3^x + k_1x + k_2) \\ &= -2k_1x + k_1 - 2k_2 \end{aligned}$$

$$-2k_1x + k_1 - 2k_2 = 2x - 5 \quad -2k_1x = 2x$$

$$k_1 = -1, \quad k_2 = 2 \quad k_1 - 2k_2 = -5$$

$$y(x) = c3^x - x + 2$$



例題5 $y(x+1) - 3y(x) = 3^x$ を解け。

また、初期条件 $x=0$ のとき、 $y(0)=2$ であれば c はいくらか。

$$y(x) = c3^x + k_13^xx \quad b=3, \quad p_n(x)=1 \text{ の場合}$$

$$c3^{x+1} + k_13^{x+1}(x+1) - 3c3^x - 3k_13^xx = 3^x$$

$$c3 + k_13(x+1) - 3c - 3k_1x = 1 \quad 3^x \text{ で割る}$$

$$k_1 = \frac{1}{3}$$

$$y(x) = c3^x + 3^{x-1}x$$

初期条件を適用すると

$$y(0) = 2 = c3^0 + 3^{-1}0 \quad c = 2$$

$$y(x) = 2 \cdot 3^x + 3^{x-1}x$$



線形2階差分方程式

同次方程式

$$y(x+2) + ay(x+1) + by(x) = 0$$

$$y(x) = c\lambda^x \quad \text{解を仮定} \quad y(x+1) = c\lambda^{x+1} \quad y(x+2) = c\lambda^{x+2}$$

$$c\lambda^{x+2} + ac\lambda^{x+1} + bc\lambda^x = 0$$

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

特性方程式

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$y(x+1) - ay(x) = 0$$

$$y(x) = ca^x$$



$$y(x+2) + ay(x+1) + by(x) = 0$$

(1) λ_1, λ_2 が異なる実根のとき $a^2 > 4b$

$$y(x) = c_1\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$





$$y(x+2) + ay(x+1) + by(x) = 0$$

(2) λ_1, λ_2 が複素根のとき $a^2 < 4b$

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x$$

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

$$\lambda_1 = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\lambda_2 = re^{-i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$e^{i\phi x} = \cos(\phi x) + i\sin(\phi x)$$

$$y(x) = c_1 r^x [\cos(\theta x) + i\sin(\theta x)] + c_2 r^x [\cos(\theta x) - i\sin(\theta x)]$$

$$= (c_1 + c_2) r^x \cos(\theta x) + i(c_1 - c_2) r^x \sin(\theta x)$$

$$y(x) = c_1 r^x \cos(\theta x) + c_2 r^x \sin(\theta x)$$



$$y(x+2) + ay(x+1) + by(x) = 0$$

(3) $\lambda_1 = \lambda_2$ のとき $a^2 = 4b$

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \cdot \lambda_2^x$$

λ_1

xを挿入

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 x \lambda_1^x$$



線形2階差分方程式

非同次方程式

$$y(x+2) + ay(x+1) + by(x) = \alpha^x P_n(x)$$

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \alpha^x Q_n(x)$$

$(\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \alpha, \lambda_2 \neq \alpha)$

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 \lambda_2^x + \lambda_1^x x Q_n(x)$$

$(\lambda_1 \text{あるいは } \lambda_2 = \alpha)$

$$y(x) = c_1 \lambda_1^x + c_2 x \lambda_2^x + \alpha^x x^2 Q_n(x)$$

$(\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha)$



例題6 $y(x+2) = y(x+1) + y(x)$ の一般解
および特解を求めよ。ただし、初期条件
が与えられているものとする。

変形 $y(x+2) - y(x+1) - y(x) = 0$

特性方程式 $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ $y(x) = c \lambda^x$

根 $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$y(x) = c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^x + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x$$

c_1, c_2 は定数



例題6 $y(x+2) = y(x+1) + y(x)$ の一般解
および特解を求めよ。ただし、初期条件
が与えられているものとする。

$$y(x) = c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^x + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x$$

$$x = 0 \text{ のとき }、 y(0) = 0 = c_1 + c_2$$

$$x = 1 \text{ のとき }、$$

$$y(1) = 1 = c_1 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$c_1 = -1/\sqrt{5}, \quad c_2 = 1/\sqrt{5}$$

$$y(x) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^x + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x$$

差分演算子

前進差分

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

後退差分

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

中心差分

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$



移動演算子

$$Ef(x) = f(x+h)$$

$$E^n f(x) = f(x+nh)$$

平均演算子

$$\mu f(x) = \frac{1}{2} \left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right) \right]$$

微分演算子

$$Df(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$



前進差分演算子と移動演算子の関係

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$f(x+h) = Ef(x)$$

$$= Ef(x) - f(x)$$

$$= (E - 1)f(x)$$

$$\Delta = E - 1$$

$$E = 1 + \Delta$$



移動演算子と微分演算子の関係

$$Ef(x) = f(x+h)$$

テイラー展開

$$= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

$$= f(x) + hDf(x) + \frac{h^2}{2!} D^2 f(x) + \dots$$

$$= \left[1 + hD + \frac{h^2}{2!} D^2 + \dots \right] f(x)$$

$$= e^{hD} f(x)$$

$$E = e^{hD}$$

マクローリン展開

$$e^{hD} = \left(1 + hD + \frac{h^2}{2!} D^2 + \dots \right)$$



微分演算子と差分演算子の関係

$$\log_e E = hD$$

$$E = e^{hD}$$

$$D = \frac{1}{h} \log_e E$$

$$E = 1 + \Delta$$

$$= \frac{1}{h} \log_e (1 + \Delta)$$

$$D = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right)$$

微分公式

展開公式

$$\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$





課題

1. 次の関数を差分せよ.

$$(1) \ 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 2^x \quad (2) \ x^5 \cdot 3a^x \quad (3) \ \frac{2 \cdot 5^x - 3x}{2x^3 - 3}$$

2. 次の差分方程式を解け.

$$(1) \ y(x+1) - 5y(x) = 2 \cdot 5^x + 3x$$

$$(2) \ 3y(x+2) + 5y(x+1) - 2y(x) = 1 + 4x$$

$$(3) \ y(x+2) - 2y(x+1) - 3y(x) = 2 \cdot 3^x + x + 6$$

$$(4) \ y(x+2) - 3y(x) - 3^{x-2} = 2x^2 - 3$$

