

第3章 補間法

1

第3章 補間法

- 3.1 ラグランジュの補間法
- 3.2 エルミートの補間法
- 3.3 スプライン関数による補間
- 3.4 アキマの方法
- 3.5 逐次補間法

2

補間法

与えられた数個の点から必要とする点の関数値を計算

離散的な数値列から近似関数を求める

数値積分公式や微分公式を得るための基の式として用いられる

コンピュータグラフィックス、CAD

裁断機の動作制御、自動的な作図



3.1 ラグランジュの補間法

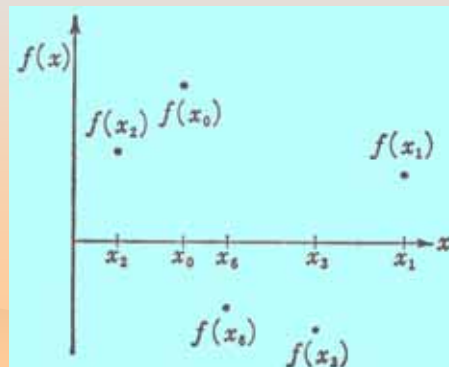
3.1.1 ラグランジュの補間公式

与えられた $n + 1$ 個の点

$$\{x_0, f(x_0)\}, \{x_1, f(x_1)\}, \{x_2, f(x_2)\}, \dots, \{x_n, f(x_n)\}$$

n 次多項式
ラグランジュの補間多項式

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$$



ラグランジュの補間公式

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$$

$n + 1$ 個の点を通る
 n 次多項式

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$$

ラグランジュの補間係数

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

$$L_k(x_j) = \delta_{kj}$$



$\delta_{kj} \Rightarrow$ クロネッカーのデルタ

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ 1 & (k = j) \end{cases}$$

ラグランジュの補間係数

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_m}{x_k - x_m} = \frac{\pi_k(x)}{\pi_k(x_k)}$$

$$\pi(x) = \prod_{m=0}^n (x - x_m) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$\begin{aligned} \pi_k(x) &= \prod_{m=0, m \neq k}^n (x - x_m) \\ &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n) \end{aligned}$$



$$\pi_k(x) = (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)$$

例 $n=5, k=2$ のとき

$$\pi_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$$

例 $n=2, k=1$ のとき

$$\pi_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)$$



7

$\pi(x)$ の微分

$$\frac{d}{dx} \pi(x) = \sum_{k=0}^n \pi_k(x) = \pi_0(x) + \pi_1(x) + \cdots + \pi_n(x)$$

$$\pi(x) = \prod_{m=0}^n (x-x_m) = (x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)$$

$$(\pi(x))' = (x-x_0) \boxed{(x-x_1) \cdots (x-x_n)} + \boxed{(x-x_0)(x-x_1)'} \cdots (x-x_n)$$

$\pi_0(x)$

$\pi_1(x)$

$$+ \cdots + \boxed{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)'} + \cdots$$

$\pi_n(x)$



8

ラグランジュの補間公式の導出

与えられた $n + 1$ 個の点

$$\{x_0, f(x_0)\}, \{x_1, f(x_1)\}, \{x_2, f(x_2)\}, \dots, \{x_n, f(x_n)\}$$

をすべて通る n 次多項式を **仮定**

$$\begin{aligned} p(x) = & a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ & + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$



ラグランジュの補間公式の導出 (2)

$$\begin{aligned} p(x) = & a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ & + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ & + \dots \dots \dots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$f(x_0) = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)$$

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)}$$



$$x = x_0 \quad \rightarrow \quad p(x_0) = f(x_0)$$

ラグランジュの補間公式の導出 (2)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\
 &\quad + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\
 &\quad + \cdots \cdots \cdots \\
 &\quad + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x_1) = a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}$$



$$x = x_1 \rightarrow p(x_1) = f(x_1)$$

11

ラグランジュの補間公式の導出 (2)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\
 &\quad + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\
 &\quad + \cdots \cdots \cdots \\
 &\quad + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x_n) = a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})$$

$$a_n = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}$$



$$x = x_n \rightarrow p(x_n) = f(x_n)$$

12

ラグランジュの補間公式の導出 (3)

$$\begin{aligned} p(x) = & a_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ & + a_1(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \\ & + \cdots \cdots \cdots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)}$$

$$a_1 = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}$$

$$a_n = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}$$



13

ラグランジュの補間公式

$$\begin{aligned} p(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} f(x_0) \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)} f(x_1) \\ & + \cdots \cdots \cdots \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} f(x_n) \end{aligned}$$



14

ラグランジュの補間公式

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)$$

$n+1$ 個の点を通る
 n 次多項式

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$$

ラグランジュの補間係数

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)}$$

$$L_k(x_j) = \delta_{kj}$$



$\delta_{kj} \Rightarrow$ クロネッカーのデルタ

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & (k \neq j) \\ 1 & (k = j) \end{cases}$$

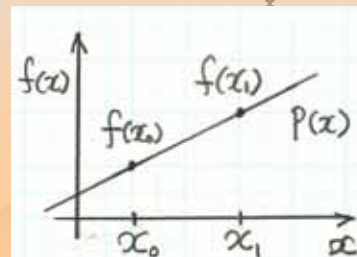
例1 $n = 1$ のときのラグランジュの補間公式を求めよ。

分点 x_0, x_1 のときは、1 次多項式

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$



例2 右の表のような x_k と $f(x_k)$ に対する補間多項式を求めよ。

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1
1	1	0
2	2	1

ラグランジュの補間係数は、

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2) \quad L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{1}{2}x(x-1)$$

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$P(x) = 0.5 \times (x-1)(x-2) \times 1 - x(x-2) \times 0 + 0.5 \times x(x-1) \times 1$$

$$P(x) = (x-1)^2$$



例3 例2の結果を用いて $x=0.5$ の $f(x)$ の補間値を求めよ。

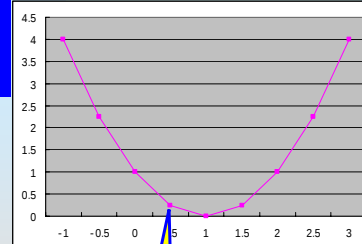
ラグランジュの補間多項式

$$P(x) = (x-1)^2$$

$$x=0.5$$

$$x=0.5$$

$$P(0.5) = (0.5-1)^2 = 0.25$$



$$x=0.5$$



例3 例2の結果を用いて $x=0.5$ の $f(x)$ の補間値を求めよ。

k	x_k	$f(x_k)$
0	0	1
1	1	0
2	2	1

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

$$P(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} f(x_0) + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} f(x_1) + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} f(x_2)$$

$x=0.5$ $x=0.5$ $x=0.5$ $x=0.5$ $x=0.5$ $x=0.5$
 $x=0.5$ 1 0 1
 $0.5(0.5-1)(0.5-2) \times 1$ $-0.5(0.5-2) \times 0$ $0.5 \times 0.5(0.5-1) \times 1$

$$P(0.5) = 0.375 \times 1 + 0.75 \times 0 + (-0.125) \times 1 = 0.25$$



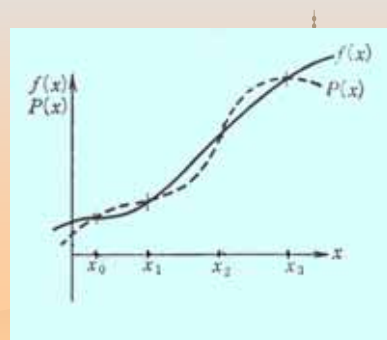
19

3.1.2 補間多項式の誤差

関数 $f(x)$ を n 次補間多項式 $p(x)$ で近似したときの誤差評価

誤差 $\Rightarrow f(x) - p(x)$

$f(x)$: 区間 I で $n+1$ 回連続微分可能



3.1.2 補間多項式の誤差

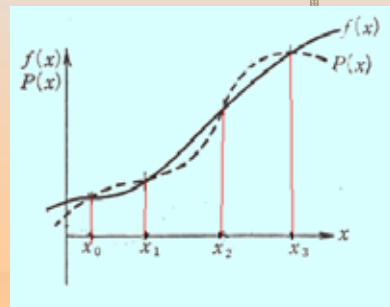
関数 $f(x)$ を n 次補間多項式 $p(x)$ で近似したときの誤差評価

補助関数 $F(x) = f(x) - p(x)$

$f(x)$: 区間 I で $n+1$ 回連続微分可能

$f(x) - p(x), \quad \Rightarrow 0 \quad x_0, x_1, \dots, x_n$

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$



3.1.2 補間多項式の誤差

関数 $f(x)$ を n 次補間多項式 $p(x)$ で近似したときの誤差評価

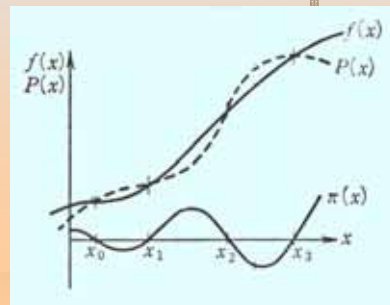
補助関数 $F(x) = f(x) - p(x) - c\pi(x)$

$f(x)$: 区間 I で $n+1$ 回連続微分可能

$f(x) - p(x), \pi(x) \Rightarrow 0 \quad x_0, x_1, \dots, x_n \quad C : \text{定数}$

区間 I で $n+1$ 個の零点

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$



補助関数 $F(x) = f(x) - p(x) - c\pi(x) \Rightarrow 0 \quad x \Rightarrow x_m$

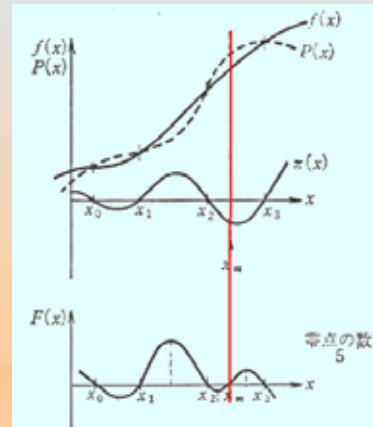
区間 I で $n+1$ 個の零点 $F(x) \Rightarrow 0 \quad x_0, x_1, \dots, x_n$

任意の新しい補間点 x_m で

$$c = \frac{f(x_m) - p(x_m)}{\pi(x_m)}$$

区間 I で $n+2$ 個の零点

$F(x) \Rightarrow 0 \quad x_0, x_1, \dots, x_m, \dots, x_n$



$$F(x) = f(x) - p(x) - c\pi(x)$$

$F(x)$ 零点 $n+2$ 個 区間 I

$F'(x)$ 零点 $n+1$ 個 区間 I

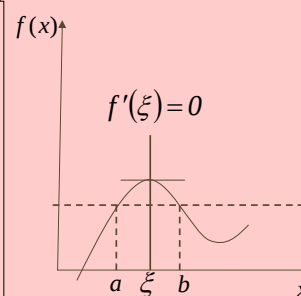


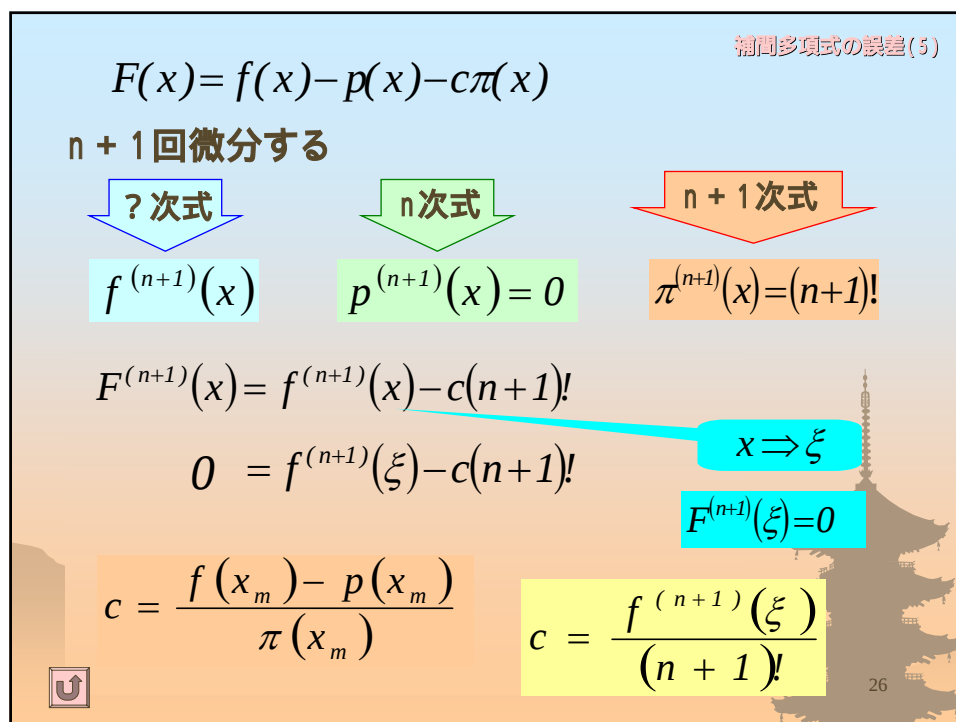
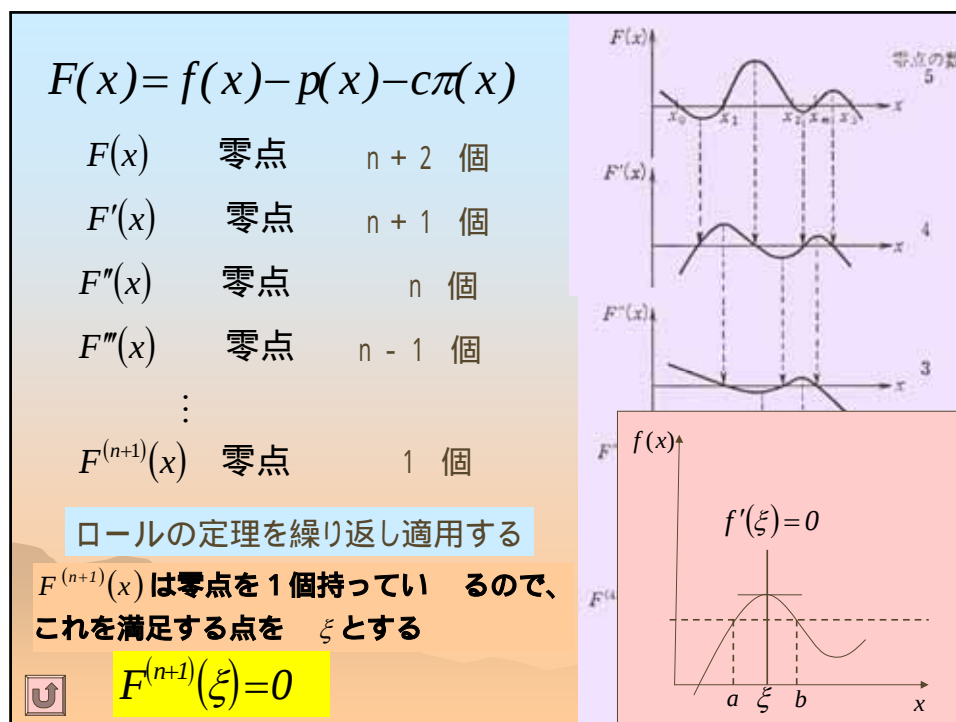
ロールの定理

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続で、开区間 (a, b) で微分可能、かつ $f(a) = f(b)$ ならば、区間 (a, b) のある点で $f'(x)$ が 0 になる。すなわち、

$$f'(\xi) = 0 \quad (a < \xi < b)$$

を満足する ξ が少なくとも一つ存在する。





$$f(x_m) - p(x_m) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi(x_m)$$

x_m は区間内の任意の 1 点

$x_m \Rightarrow x$

補間多項式の誤差評価式

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi(x)$$



27

例4 例1の最大誤差を求めよ

例1は $n = 1$ の場合であるから

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!} \pi(x)$$

$$|f(x) - p(x)| \leq \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} \right| f''_{\max}$$

$f''(\xi)$ の最大値 $\Rightarrow f''_{\max}$

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

$$\text{最大誤差 } |f(x) - p(x)| \leq \frac{(x_0 - x_1)^2}{8} f''_{\max}$$

$|(x - x_0)(x - x_1)|$ が x_0 と x_1 の間でとりうる

最大値は $x = \frac{(x_0 + x_1)}{2}$ のときで、 $\frac{(x_1 - x_0)^2}{4}$



28