

3.2 エルミート(Hermite)の補間法

エルミートの補間多項式

$$P(x) = \sum_{k=0}^n h_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g_k(x) f'(x_k)$$

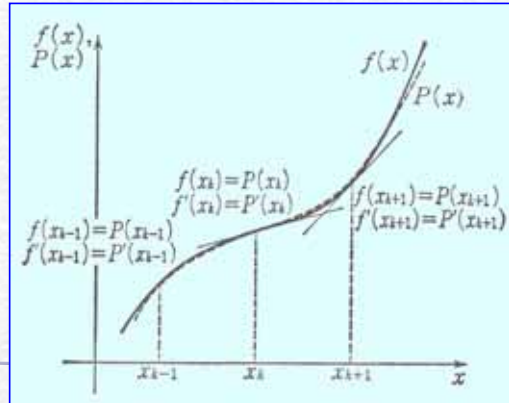
$n+1$ 個の点で関数と一致

$$p(x_k) = f(x_k)$$

$n+1$ 個の点で微係数が一致

$$p'(x_k) = f'(x_k)$$

$2n+1$ 次の多項式



エルミートの補間多項式と
ラグランジュの補間公式の関係

エルミート(Hermite)の補間法(2)

エルミートの補間多項式

$$P(x) = \sum_{k=0}^n h_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g_k(x) f'(x_k)$$

$$p(x_k) = f(x_k) \quad (k=0,1,2,\dots,n)$$

$$p'(x_k) = f'(x_k) \quad (k=0,1,2,\dots,n)$$

ラグランジュの補間公式

$$P(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k)$$

$h_k(x_i), g_k(x_i)$ を求める

エルミート(Hermite)の補間法(3)

$$P(x) = \sum_{k=0}^n h_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g_k(x) f'(x_k)$$

$$p(x_k) = f(x_k)$$

$$p'(x_k) = f'(x_k)$$

$$x \Rightarrow x_j$$

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^n h_k(x_j) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g_k(x_j) f'(x_k) = f(x_j)$$

$$\begin{aligned} &= h_0(x_j) f(x_0) + h_1(x_j) f(x_1) + \cdots + h_j(x_j) f(x_j) + \cdots + h_n(x_j) f(x_n) \\ &+ g_0(x_j) f'(x_0) + g_1(x_j) f'(x_1) + \cdots + g_j(x_j) f'(x_j) + \cdots + g_n(x_j) f'(x_n) \\ &= f(x_j) \end{aligned}$$

$$h_j(x_j) = 1$$

$$h_k(x_i) = \delta_{ki} \cdots \langle 1 \rangle \quad g_k(x_i) = 0 \cdots \langle 2 \rangle$$

$$h_j(x_{j \text{ 以外}}) = 0$$



$h'_k(x_i), g'_k(x_i)$ を求める

エルミート(Hermite)の補間法(4)

$$P'(x) = \sum_{k=0}^n h'_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g'_k(x) f'(x_k)$$

$$p(x_k) = f(x_k)$$

$$p'(x_k) = f'(x_k)$$

$$x \Rightarrow x_j$$

$$P'(x_j) = \sum_{k=0}^n h'_k(x_j) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g'_k(x_j) f'(x_k) = f'(x_j)$$

$$\begin{aligned} &= h'_0(x_j) f(x_0) + h'_1(x_j) f(x_1) + \cdots + h'_j(x_j) f(x_j) + \cdots + h'_n(x_j) f(x_n) \\ &+ g'_0(x_j) f'(x_0) + g'_1(x_j) f'(x_1) + \cdots + g'_j(x_j) f'(x_j) + \cdots + g'_n(x_j) f'(x_n) \\ &= f'(x_j) \end{aligned}$$

$$h'_k(x_i) = 0 \cdots \langle 3 \rangle \quad g'_k(x_i) = \delta_{ki} \cdots \langle 4 \rangle$$



$h_k(x), g_k(x)$ を求める

$$h_k(x_i) = \delta_{ki} \cdots \langle 1 \rangle$$

$$g_k(x_i) = 0 \cdots \langle 2 \rangle$$

$$h'_k(x_i) = 0 \cdots \langle 3 \rangle$$

$$g'_k(x_i) = \delta_{ki} \cdots \langle 4 \rangle$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n h_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g_k(x) f'(x_k)$$



$h_k(x)$, を決定する(1)

仮定

$$h_k(x) = (ax + b)[L_k(x)]^2$$

$$x \Rightarrow x_k \quad h_k(x_k) = 1$$

$$h_k(x_i) = \delta_{ki} \cdots \langle 1 \rangle$$

$$L_k(x_k) \Rightarrow 1$$

$$L_k(x_j) = \delta_{kj}$$

微分

$$1 = ax_k + b \quad (1)$$

$$h'_k(x) = a[L_k(x)]^2 + 2(ax + b)[L_k(x)]L'_k(x)$$

$$x \Rightarrow x_k \quad h'_k(x_k) = 0$$

$$h'_k(x_i) = 0 \cdots \langle 3 \rangle$$

$$L_k(x_k) \Rightarrow 1$$

$$0 = a + 2(ax_k + b)L'_k(x_k) \quad (3)$$



a, b を求める

エルミート(Hermite)の補間法(7)

$$1 = ax_k + b \quad (1)$$

$$0 = a + 2(ax_k + b)L'_k(x_k) \quad (3)$$

1

$$0 = a + 2L'_k(x_k) \quad (3)'$$

$$a = -2L'_k(x_k)$$

$$1 = -2L'_k(x_k)x_k + b \quad (1)'$$

$$b = 1 + 2L'_k(x_k)x_k$$

$$h_k(x) = [1 - 2L'_k(x_k)(x - x_k)][L_k(x)]^2$$

$$h_k(x) = (ax + b)[L_k(x)]^2$$



$g_k(x)$ を決定する(1)

エルミート(Hermite)の補間法(8)

仮定 $g_k(x) = (cx + d)[L_k(x)]^2$

$$x \Rightarrow x_k$$

$$g_k(x_k) = 0$$

$$g_k(x_i) = 0 \cdots \langle 2 \rangle$$

$$L_k(x_k) \Rightarrow 1$$

$$L_k(x_j) = \delta_{kj}$$

微分

$$0 = cx_k + d \quad (2)$$

$$g'_k(x) = c[L_k(x)]^2 + 2(cx + d)[L_k(x)]L'_k(x)$$

$$x \Rightarrow x_k$$

$$g'_k(x_k) = 1$$

$$g'_k(x_i) = \delta_{ki} \cdots \langle 4 \rangle$$

$$L_k(x_k) \Rightarrow 1$$

$$1 = c + 2(cx_k + d)L'_k(x_k) \quad (4)$$



c, d を求める

エルミート(Hermite)の補間法(9)

$$0 = cx_k + d \quad (2)$$

$$1 = c + 2 \underbrace{(cx_k + d)}_0 L'_k(x_k) \quad (4)$$

$$c = 1 \quad (4)'$$

$$0 = 1 \times x_k + d \quad (2)'$$

$$d = -x_k$$

$$g_k(x) = (x - x_k)[L_k(x)]^2$$

$$g_k(x) = (cx + d)[L_k(x)]^2$$



エルミートの補間多項式

エルミート(Hermite)の補間法(10)

まとめ

$$P(x) = \sum_{k=0}^n h_k(x) f(x_k) + \sum_{k=0}^n g_k(x) f'(x_k)$$

$$h_k(x) = [1 - 2L'_k(x_k)(x - x_k)][L_k(x)]^2$$

$$g_k(x) = (x - x_k)[L_k(x)]^2$$

エルミート補間多項式の誤差

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} [\pi(x)]^2$$



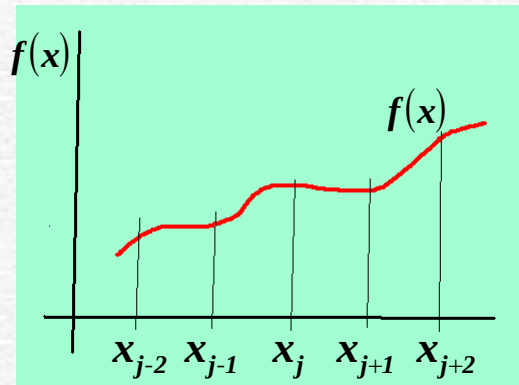
3.3 スプライン(Spline)関数による補間

区分多項式

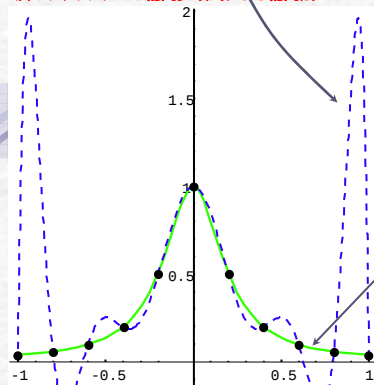
閉区間 $[a, b]$ を $n + 1$ 個の分点で分割し、この小区間内をそれぞれ異なった多項式で関数を近似する方法

小区間

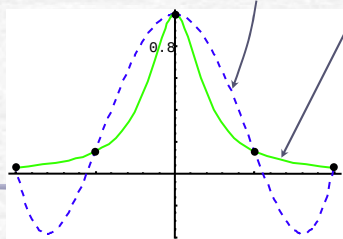
$$[x_j, x_{j+1}]$$



$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$



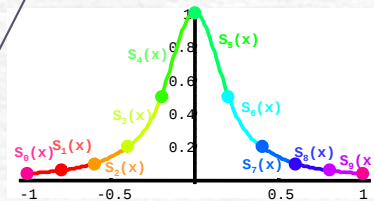
5次のラグランジュの補間多項式による補間法



全体補間と区分多項式による補間法

元の関数 $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$

スプライン関数による補間法

[illegible]

スプライン関数の定義

スプライン関数による補間
(2)

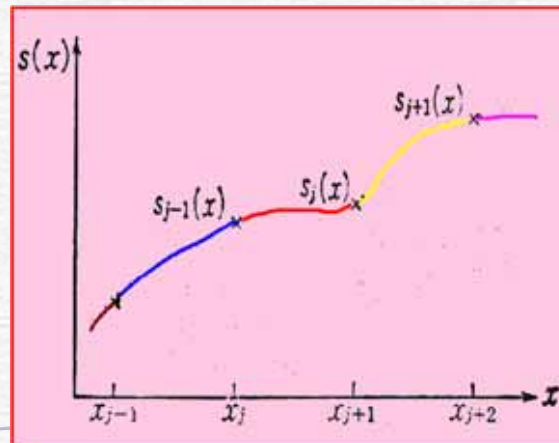
$$s_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

3次区分多項式

関数値が一致

1階微分値が連続

2階微分値が連続



スプライン関数の定義(2)

スプライン関数による補間
(3)

3次区分多項式

$$\begin{aligned} s_j(x) &= a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3 \\ &= \sum_{i=0}^3 a_{ji}(x - x_j)^i \end{aligned}$$

関数値が一致 $s_j(x_j) = f_j \quad (0 \leq j \leq n-1)$

$s_j(x_{j+1}) = f_{j+1} \quad (0 \leq j \leq n-1)$

1階微分値が連続 $s'_{j-1}(x_j) = s'_j(x_j) \quad (1 \leq j \leq n-1)$

2階微分値が連続 $s''_{j-1}(x_j) = s''_j(x_j) \quad (1 \leq j \leq n-1)$

端点条件

スプライン関数による補間 (4)

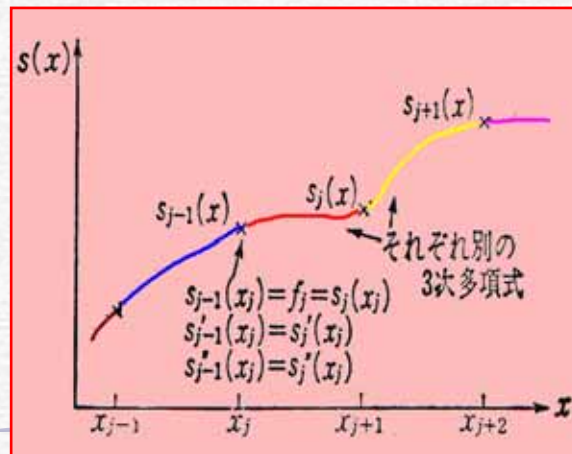
条件式 $4n - 2$ 個
未知数 $4n$ 個

$$s_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

条件式を 2 個追加

$$s'_0(x_0) = \alpha_1$$

$$s'_{n-1}(x_n) = \beta_1$$



スプライン関数の導出

スプライン関数による補間(5)

$$x \Rightarrow x_j \quad s_j(x_j) = a_{j0} = f_j \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x \Rightarrow x_{j+1} \quad s_j(x_{j+1}) &= a_{j0} + a_{j1}h_j + a_{j2}h_j^2 + a_{j3}h_j^3 \\ &= f_{j+1} \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_{j+1} - x_j = h_j$$



$$s_j(x_{j+1}) = f_{j+1}$$

$$s_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

スプライン関数を微分する

スプライン関数による補間(6)

$$s_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

スプライン関数を1回微分する

$$s'_j(x) = a_{j1} + 2a_{j2}(x - x_j) + 3a_{j3}(x - x_j)^2$$

さらに、もう1回微分する

$$s''_j(x) = 2a_{j2} + 6a_{j3}(x - x_j)$$

$$x \Rightarrow x_j \quad s''_j(x_j) = 2a_{j2}$$

$$x \Rightarrow x_{j+1} \quad s''_j(x_{j+1}) = 2a_{j2} + 6a_{j3}h_j$$



スプライン関数の導出(3)

スプライン関数による補間(7)

2次微分値の仮定 $s''_j(x_j) = u_j \quad (0 \leq j \leq n-1)$

$$s''_j(x_{j+1}) = u_{j+1} \quad (0 \leq j \leq n-1)$$

$$x \Rightarrow x_j \quad s''_j(x_j) = 2a_{j2} = u_j \quad (3)$$

$$x \Rightarrow x_{j+1} \quad s''_j(x_{j+1}) = 2a_{j2} + 6a_{j3}h_j = u_{j+1} \quad (4)$$

$$x \Rightarrow x_j \quad s''_j(x_j) = 2a_{j2}$$

$$x \Rightarrow x_{j+1} \quad s''_j(x_{j+1}) = 2a_{j2} + 6a_{j3}h_j$$



スプライン関数の導出(4)

スプライン関数による補間(8)

$$a_{j0} = f_j \quad (1)$$

$$a_{j0} + a_{j1}h_j + a_{j2}h_j^2 + a_{j3}h_j^3 = f_{j+1} \quad (2)$$

$$2a_{j2} = u_j \quad (3)$$

$$2a_{j2} + 6a_{j3}h_j = u_{j+1} \quad (4)$$

$$m_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}$$

$$a_{j0} = f_j$$

$$a_{j1} = m_j - \frac{1}{6}h_j(2u_j + u_{j+1})$$

$$a_{j2} = u_j / 2$$

$$a_{j3} = \frac{1}{6h_j}(u_{j+1} - u_j)$$

$$f_j + a_{j1}h_j + \frac{1}{2}h_j^2u_j + \frac{1}{6}h_j^2(u_{j+1} - u_j) = f_{j+1}$$

$$a_{j1} + \frac{1}{2}h_ju_j + \frac{1}{6}h_j(u_{j+1} - u_j) = \frac{1}{h_j}(f_{j+1} - f_j)$$

$$a_{j1} = \frac{1}{h_j}(f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{6}h_j(u_{j+1} + 2u_j)$$



スプライン関数の導出(5)

スプライン関数による補間(9)

$$a_{j0} = f_j \quad a_{j1} = m_j - \frac{1}{6}h_j(2u_j + u_{j+1})$$

$$a_{j2} = u_j / 2 \quad a_{j3} = \frac{1}{6h_j}(u_{j+1} - u_j)$$

$$m_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}$$

$$s_j(x) = f_j + \left\{ m_j - \frac{h_j}{6}(2u_j + u_{j+1}) \right\} (x - x_j) + \frac{u_j}{2} (x - x_j)^2 + \frac{1}{6h_j} (u_{j+1} - u_j) (x - x_j)^3$$



$$s_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

1 回微分

$$s'_j(x) = m_j - \frac{h_j}{6}(2u_j + u_{j+1}) + u_j(x - x_j) + \frac{1}{2h_j}(u_{j+1} - u_j)(x - x_j)^2$$

$$x \Rightarrow x_j \quad s'_j(x_j) = m_j - \frac{h_j}{6}(2u_j + u_{j+1})$$

j j - 1

$$s'_{j-1}(x) = m_{j-1} - \frac{h_{j-1}}{6}(2u_{j-1} + u_j) + u_{j-1}(x - x_{j-1}) + \frac{1}{2h_{j-1}}(u_j - u_{j-1})(x - x_{j-1})^2$$

$$s_j(x) = f_j + \left\{ m_j - \frac{h_j}{6}(2u_j + u_{j+1}) \right\} (x - x_j)$$

$$x \Rightarrow x_j \quad x_j - x_{j-1} = h_{j-1}$$

$$s'_{j-1}(x_j) = m_{j-1} - \frac{h_{j-1}}{6}(2u_{j-1} + u_j) + \frac{1}{2h_{j-1}}(u_j - u_{j-1})h_{j-1}$$



$$s'_j(x_j) = m_j - \frac{h_j}{6}(2u_j + u_{j+1})$$

$$s'_{j-1}(x_j) = s'_j(x_j)$$

$$s'_{j-1}(x_j) = m_{j-1} - \frac{h_{j-1}}{6}(2u_{j-1} + u_j) + u_{j-1}h_{j-1} + \frac{1}{2}(u_j - u_{j-1})h_{j-1}$$

$$m_j - \frac{h_j}{6}(2u_j + u_{j+1}) = m_{j-1} - \frac{h_{j-1}}{6}(2u_{j-1} + u_j) + u_{j-1}h_{j-1} + \frac{1}{2}(u_j - u_{j-1})h_{j-1}$$

$$\frac{h_j}{6}u_{j+1} + \frac{h_{j-1}+h_j}{3}u_j + \frac{h_{j-1}}{6}u_{j-1} = m_j - m_{j-1} = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j} - \frac{f_j - f_{j-1}}{h_{j-1}}$$

$$\frac{h_j}{6}u_{j+1} + \frac{h_{j-1}+h_j}{3}u_j + \frac{h_{j-1}}{6}u_{j-1} = \frac{f_{j+1}}{h_j} - \left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j-1}} \right) f_j + \frac{f_{j-1}}{h_{j-1}}$$



例7 下の表で与えられた数値をもとにしてスプライン関数を求めよ。ただし、端点条件として2次微分値を $u_0 = 0$, $u_3 = 6$ とする。

$$u_0 = 0$$

$$u_3 = 6$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	3	16

$j = 1$ を代入

$$\frac{h_1}{6}u_2 + \frac{h_0+h_1}{3}u_1 + \frac{h_0}{6}u_0 = \frac{f_2}{h_1} - \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_0}\right)f_1 + \frac{f_0}{h_0}$$

$$\frac{1}{6}u_2 + \frac{1+1}{3}u_1 + \frac{1}{6} \times 0 = \frac{3}{1} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \times 2 + \frac{0}{1}$$

$$u_2 + 4u_1 = -6$$

$$\frac{h_j}{6}u_{j+1} + \frac{h_{j-1}+h_j}{3}u_j + \frac{h_{j-1}}{6}u_{j-1} = \frac{f_{j+1}}{h_j} - \left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j-1}}\right)f_j + \frac{f_{j-1}}{h_{j-1}}$$



例7 下の表で与えられた数値をもとにしてスプライン関数を求めよ。ただし、端点条件として2次微分値を $u_0 = 0$, $u_3 = 6$ とする。

$$u_0 = 0$$

$$u_3 = 6$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	3	16

$j = 2$ を代入

$$\frac{h_2}{6}u_3 + \frac{h_1+h_2}{3}u_2 + \frac{h_1}{6}u_1 = \frac{f_3}{h_2} - \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_1}\right)f_2 + \frac{f_1}{h_1}$$

$$\frac{1}{6} \times 6 + \frac{1+1}{3}u_2 + \frac{1}{6} \times u_1 = \frac{16}{1} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \times 3 + \frac{2}{1}$$

$$4u_2 + u_1 = 66$$

$$\frac{h_j}{6}u_{j+1} + \frac{h_{j-1}+h_j}{3}u_j + \frac{h_{j-1}}{6}u_{j-1} = \frac{f_{j+1}}{h_j} - \left(\frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j-1}}\right)f_j + \frac{f_{j-1}}{h_{j-1}}$$



例7 下の表で与えられた数値をもとにしてスプライン関数を求めよ。ただし、端点条件として2次微分値を $u_0 = 0, u_3 = 6$ とする。

$$u_0 = 0 \quad u_3 = 6$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	3	16

$$\begin{cases} 4u_1 + u_2 = -6 & (j=1) \\ u_1 + 4u_2 = 66 & (j=2) \end{cases}$$

$$h_0 = h_1 = h_2 = 1$$

$$u_1 = -6 \quad u_2 = 18$$

$$m_0 = 2 \quad m_1 = 1 \quad m_2 = 13$$

$$m_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}$$



例7 下の表で与えられた数値をもとにしてスプライン関数を求めよ。ただし、端点条件として2次微分値を $u_0 = 0, u_3 = 6$ とする。

$$u_0 = 0 \quad u_1 = -6 \quad u_2 = 18 \quad u_3 = 6$$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	2	3	16

$$m_0 = 2 \quad m_1 = 1 \quad m_2 = 13$$

$$s_0(x) = 0 + \left\{ 2 - \frac{1}{6}(2 \times 0 - 6) \right\} (x-0) + \frac{1}{6}(-6-0)(x-0)^3$$

$$s_0(x) = 3(x-0) - (x-0)^3$$

$$s_1(x) = 2 + \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_j} + \frac{4}{6}(2u_j^1 + u_{j+1}) \right) \right\} (x-x_j)$$

$$s_2(x) = 3 + 6 \left(\frac{x-2}{2} \right) + 9 \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 - \frac{2}{6h_j} (u_{j+1} - u_j) \left(\frac{x-2}{2} \right)^3$$

