

3.4 アキマ (Akima) の方法



アキマの多項式

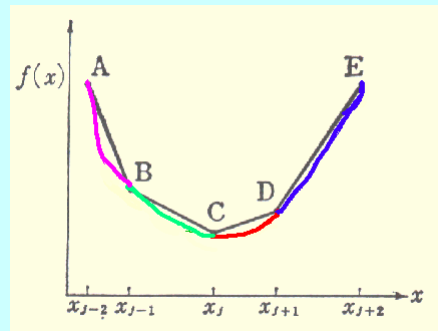
両端の分点のデータと幾何学的に求められた
1次微分値により求められる3次の区分多項式

異常屈曲点のない曲線

手書きの自然な曲線

地図の等高線

洋服のデザイン画



アキマの多項式の定義

アキマの方法(2)

$$p_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

3次区分多項式 小区間 $[x_j, x_{j+1}]$ $(0 \leq j \leq n-1)$

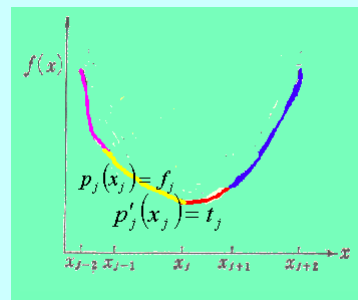
関数値が一致 $p_j(x_j) = f_j$

$$p_j(x_{j+1}) = f_{j+1}$$

幾何学的に求められた
微分値と一致

$$p'_j(x_j) = t_j$$

$$p'_j(x_{j+1}) = t_{j+1}$$



点 x_j における傾き t_j の求め方

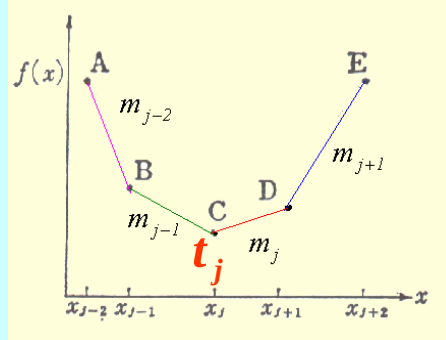
アキマの方法(3)

直線の傾き

$$m_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}$$

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

t_j は点Cの両側の線分の
勾配の比例配分と考える



$$t_j = \frac{|m_{j+1} - m_j| m_{j-1} + |m_{j-1} - m_{j-2}| m_j}{|m_{j+1} - m_j| + |m_{j-1} - m_{j-2}|}$$

$$t_j = \frac{m_{j-1} + m_j}{2}$$

分母が零となる場合



アキマの多項式の導出

アキマの方法(4)

$$p_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3 = f_{j+1}$$

x_{j+1}

x_{j+1}

x_{j+1}

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

$$p_j(x_j) = a_{j0} = f_j \quad (1)$$

$$\begin{aligned} p_j(x_{j+1}) &= a_{j0} + a_{j1}h_j + a_{j2}h_j^2 + a_{j3}h_j^3 \\ &= f_{j+1} \end{aligned} \quad (2)$$



アキマの多項式を微分する

アキマの方法(5)

$$p_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x - x_j) + a_{j2}(x - x_j)^2 + a_{j3}(x - x_j)^3$$

1回微分

$$p'_j(x) = a_{j1} + 2a_{j2}(x - x_j) + 3a_{j3}(x - x_j)^2$$

$$x \Rightarrow x_j \quad p'_j(x_j) = a_{j1}$$

$$p'_j(x_j) = t_j$$

$$x \Rightarrow x_{j+1} \quad p'_j(x_{j+1}) = a_{j1} + 2a_{j2}h_j + 3a_{j3}h_j^2$$

$$p'_j(x_{j+1}) = t_{j+1}$$

$$a_{j1} = t_j \quad (3)$$

$$a_{j1} + 2a_{j2}h_j + 3a_{j3}h_j^2 = t_{j+1} \quad (4)$$



アキマの多項式の係数を求める

アキマの方法(6)

$$a_{j0} = f_j \quad (1)$$

$$a_{j0} + a_{j1}h_j + a_{j2}h_j^2 + a_{j3}h_j^3 = f_{j+1} \quad (2)$$

$$a_{j1} = t_j \quad (3)$$

$$a_{j1} + 2a_{j2}h_j + 3a_{j3}h_j^2 = t_{j+1} \quad (4)$$

$$a_{j2} + a_{j3}h_j = \frac{m_j - t_j}{h_j}$$

$$a_{j3}h_j = \frac{m_j - t_j}{h_j} - \frac{3m_j - 2t_j - t_{j+1}}{h_j}$$

$$a_{j3} = \frac{-2m_j + t_j + t_{j+1}}{h_j^2}$$



J

$$\begin{aligned} a_{j0} &= f_j \\ a_{j1} &= t_j \\ a_{j2} &= \frac{3m_j - 2t_j - t_{j+1}}{h_j} \\ a_{j3} &= \frac{-2m_j + t_j + t_{j+1}}{h_j^2} \end{aligned}$$

アキマの多項式を求める

アキマの方法(7)

$$b^j(x) = f_j + f_j'(x-x_j) + \frac{f_j''}{3h_j^2 - h_j^2 - h_j^2}(x-x_j)^2 + \frac{f_j'''}{-5h_j^3 + f_j' + f_j'^2}(x-x_j)^3$$

小区間 $[x_j, x_{j+1}]$ $(0 \leq j \leq n-1)$



$$p_j(x) = a_{j0} + a_{j1}(x-x_j) + a_{j2}(x-x_j)^2 + a_{j3}(x-x_j)^3$$

$$a_{j0} = f_j \quad a_{j1} = t_j \quad a_{j2} = \frac{3m_j - 2t_j - t_{j+1}}{h_j} \quad a_{j3} = \frac{-2m_j + t_j + t_{j+1}}{h_j^2}$$

端点の求め方

アキマの方法(8)

区間外の分点を2個ずつ、両側で必要

分点C, D, Eを通る2次曲線を作る

新しい点F, Gを作る

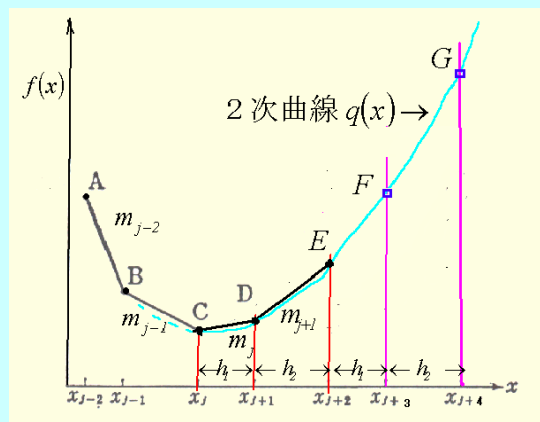
2次曲線の式

$$q(x) = \sum_{k=j}^{j+2} A_k(x) f(x_k)$$

$$A_k(x) = \prod_{\substack{i=j \\ i \neq k}}^{j+2} f(x_i)$$

点F $f_{j+3} = q(x_{j+3})$

点G $f_{j+4} = q(x_{j+4})$



例7 例6の表のデータを用いて各区間の
アキマの多項式を求めよ。

アキマの方法(9)

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-7	-3	0	2	3	16	41	78

$(0, 0), (1, 2), (2, 3)$ を
通る2次曲線を求める

$$q(x) = \sum_{k=j}^{j+2} A_k(x) f(x_k)$$

$$q(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \times 0 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \times 2 + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \times 3$$

$$q(x) = (-x^2 + 5x)/2 \quad q(-2) = -7 \quad q(-1) = -3$$

$(1, 2), (2, 3), (3, 16)$ を通る2次曲線を求める

$$q(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} \times 2 + \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} \times 3 + \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} \times 16$$

 $q(x) = 6x^2 - 17x + 13 \quad q(4) = 41 \quad q(5) = 78$

例7 例6の表のデータを用いて各区間の
アキマの多項式を求めよ。

アキマの方法(10)

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-7	-3	0	2	3	16	41	78

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
m_j	4	3	2	1	13	25	37	

$$t_0 = \frac{|1-2| \times 3 + |3-4| \times 2}{|1-2| + |3-4|} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$t_1 = \frac{25}{13} = 1.9231 \quad t_2 = 19.0$$

$$m_j = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_j}$$

$$t_j = \frac{|m_{j+1} - m_j| m_{j-1} + |m_{j-1} - m_{j-2}| m_j}{|m_{j+1} - m_j| + |m_{j-1} - m_{j-2}|}$$



例7 例6の表のデータを用いて各区間の
アキマの多項式を求めよ。

アキマの方法(11)

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-7	-3	0	2	3	16	41	78
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
m_j	4	3	2	1	13	25	37	

$$t_0 = 2.5 \quad t_1 = 1.923 \quad t_2 = 1.90$$

$$b^0(x) = 0 + 5.2(x - x^1) + \frac{1}{3 \times 5 - 5 \times 5^2 - 1 \cdot 0.53}(x - x^1)_5 + \frac{1}{-5 \times 5 + 5^2 + 1 \cdot 0.53}(x - x^1)_3$$

$$b^0(x) = 0 + 5.200(x - 0) - 0.053(x - 0)_5 + 0.453(x - 0)_3$$

$$b^1(x) = 1^1 + 1^1(x - x^1) + \frac{\mu^1}{3w^1 - 5t^1 - 1^{1+1}}(x - x^1)_5 + \frac{\mu^1}{-5w^1 + 1^1 + 1^{1+1}}(x - x^1)_3$$



例7 例6の表のデータを用いて各区間の
アキマの多項式を求めよ。

アキマの方法(12)

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-7	-3	0	2	3	16	41	78
x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
m_j	4	3	2	1	13	25	37	

$$b^0(x) = 0.000 + 5.200(x - 0) - 0.053(x - 0)_5 + 0.453(x - 0)_3$$

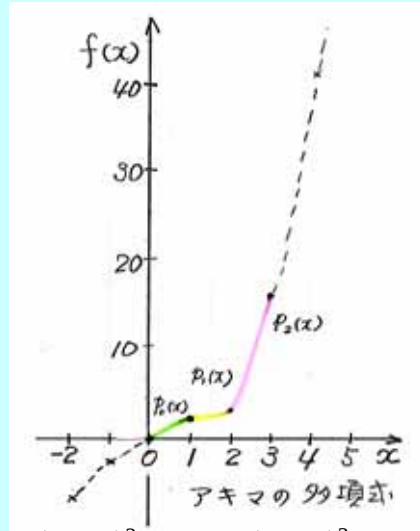
$$b^1(x) = 5.000 + 1.053(x - 1) - 5.100(x - 1)_5 + 1.847(x - 1)_3$$

$$b^5(x) = 3.000 + 1.053(x - 5) + 10.124(x - 5)_5 - 2.011(x - 5)_3$$



アキマの多項式

両端の分点のデータと
幾何学的に求められた
1次微分値により求めら
れる3次の区分多項式



$$p_0(x) = 0.000 + 2.500(x - 0) - 0.923(x - 0)^2 + 0.423(x - 0)^3$$

$$p_1(x) = 2.000 + 1.923(x - 1) - 2.769(x - 1)^2 + 1.846(x - 1)^3$$



$$b^5(x) = 3.000 + 1.053(x - 5) + 1.012(x - 5)^2 - 2.011(x - 5)^3$$

3.5 逐次補間法

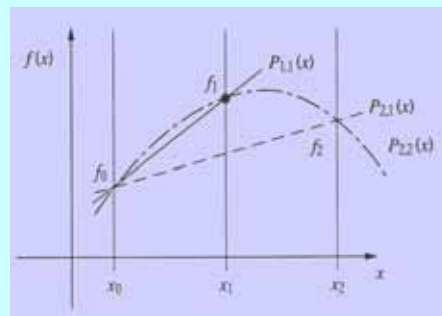
3.5.1 エイトケン (Aitken) の方法

$(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ を通る直線

$$p_{1,1}(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$$

$(x_0, f_0), (x_2, f_2)$ を通る直線

$$p_{2,1}(x) = \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} f_0 + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} f_2$$



$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ を通る2次曲線

$$p_{2,2}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2$$



3.5 逐次補間法

3.5.1 エイトケン (Aitken) の方法

$(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ を通る直線 $(x_0, f_0), (x_2, f_2)$ を通る直線

$$p_{1,1}(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} f_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0} f_1 \quad p_{2,1}(x) = \frac{x-x_2}{x_0-x_2} f_0 + \frac{x-x_0}{x_2-x_0} f_2$$

$(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2)$ を通る2次曲線

$$p_{2,2}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2$$

$$p_{2,2}(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} p_{1,1}(x) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} p_{2,1}(x)$$



エイトケンの逐次計算式

逐次補間法(2)

$$p_{k,d+1}(x) = \frac{(x_k - x)p_{d,d}(x) - (x_d - x)p_{k,d}(x)}{x_k - x_d}$$

$$p_{k,0}(x) = f_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

$k \backslash d$	0	1	2	...	k	...	n	$x_k - x$
x_0	$P_{0,0}$							$x_0 - x$
x_1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$						$x_1 - x$
x_2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$					$x_2 - x$
$\vdots$								$\vdots$
x_k	$P_{k,0}$	$P_{k,1}$	$P_{k,2}$	$\dots$	$P_{k,k}$			$x_k - x$
$\vdots$								$\vdots$
x_n	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	$\dots$	$P_{n,k}$	$\dots$	$P_{n,n}$	$x_n - x$



ネビーユ(Neville)の逐次計算式

逐次補間法(3)

$$p_{k,d+1}(x) = \frac{(x_k - x)p_{k-1,d}(x) - (x_{k-d-1} - x)p_{k,d}(x)}{x_k - x_{k-d-1}}$$

$$p_{k,0}(x) = f_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

k \ d	0	1	2	...	k-1	k	...	n	$x_k - x$
x_0	$P_{0,0}$								$x_0 - x$
x_1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$							$x_1 - x$
x_2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$						$x_2 - x$
$\vdots$									$\vdots$
x_{k-1}	$P_{k-1,0}$	$P_{k-1,1}$	$P_{k-1,2}$	...	$P_{k-1,k-1}$				$x_{k-1} - x$
x_k	$P_{k,0}$	$P_{k,1}$	$P_{k,2}$	...	$P_{k,k-1}$	$P_{k,k}$			$x_k - x$
$\vdots$									$\vdots$
x_n	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	...	$P_{n,n-1}$	$P_{n,n}$			$x_n - x$



例8 下の平方根表を用いてエイトケンの方法により $\sqrt{2.17}$ を求めよ。

逐次補間法(4)

k	x_k	$p_{k,0}$	$p_{k,1}$	$p_{k,2}$	$p_{k,3}$	$x_k - x$
0	2.05	1.43178				-0.12
1	2.10	1.44914	1.47344			-0.07
2	2.15	1.46629				-0.02
3	2.20	1.48324				0.03

$$p_{k,d+1}(x) = \frac{(x_k - x)p_{d,d}(x) - (x_d - x)p_{k,d}(x)}{x_k - x_d}$$

$$p_{k,0} = f(x_k)$$

$$k=1, d=0$$

$$p_{1,1}(x) = \frac{(2.10 - 2.17) \times 1.43178 - (2.05 - 2.17) \times 1.44914}{2.10 - 2.05}$$



例8 下の平方根表を用いてエイトケンの方法により $\sqrt{2.17}$ を求めよ。

逐次補間法(4)

k	x_k	$p_{k,0}$	$p_{k,1}$	$p_{k,2}$	$p_{k,3}$	$x_k - x$
0	2.05	1.43178				-0.12
1	2.10	1.44914	1.47344			-0.07
2	2.15	1.46629	1.47319			-0.02
3	2.20	1.48324	1.47295			0.03

$$p_{k,d+1}(x) = \frac{(x_k - x)p_{d,d}(x) - (x_d - x)p_{k,d}(x)}{x_k - x_d}$$

$$p_{k,0} = f(x_k)$$

$$k=3, d=0$$

$$p_{3,1}(x) = \frac{(2.20 - 2.17) \times 1.43178 - (2.05 - 2.17) \times 1.48324}{2.20 - 2.05}$$



例8 下の平方根表を用いてエイトケンの方法により $\sqrt{2.17}$ を求めよ。

逐次補間法(4)

k	x_k	$p_{k,0}$	$p_{k,1}$	$p_{k,2}$	$p_{k,3}$	$x_k - x$
0	2.05	1.43178				-0.12
1	2.10	1.44914	1.47344			-0.07
2	2.15	1.46629	1.47319	1.47309		-0.02
3	2.20	1.48324	1.47295	1.47310		0.03

$$p_{k,d+1}(x) = \frac{(x_k - x)p_{d,d}(x) - (x_d - x)p_{k,d}(x)}{x_k - x_d}$$

$$p_{k,0} = f(x_k)$$

$$k=3, d=1$$

$$p_{3,2}(x) = \frac{(2.20 - 2.17) \times 1.47344 - (2.10 - 2.17) \times 1.47295}{2.20 - 2.10}$$



例8 下の平方根表を用いてエイトケンの方法により $\sqrt{2.17}$ を求めよ。

逐次補間法(4)

k	x_k	$p_{k,0}$	$p_{k,1}$	$p_{k,2}$	$p_{k,3}$	$x_k - x$
0	2.05	1.43178				-0.12
1	2.10	1.44914	1.47344			-0.07
2	2.15	1.46629	1.47319	1.47309		-0.02
3	2.20	1.48324	1.47295	1.47310	1.47309	0.03

$$p_{k,d+1}(x) = \frac{(x_k - x)p_{d,d}(x) - (x_d - x)p_{k,d}(x)}{x_k - x_d}$$

$$p_{k,0} = f(x_k)$$

$$k=3, d=2$$

$$p_{3,3}(x) = \frac{(2.20 - 2.17) \times 1.47309 - (2.15 - 2.17) \times 1.47310}{2.20 - 2.15}$$



楽しい課題



1 下の表をもとにラグランジュの補間多項式を求めよ。

x	0.40	0.41	0.42	0.43	0.44	0.45
$f(x)$	1.49182	1.50682	1.52196	1.53726	1.55271	1.56831

2 上で求めたラグランジュの補間多項式を用いて、 $x=0.425$ の値を求めよ。

3 エイトケンの方法によって問2の値を求めよ。

4 上の表をもとにスプラインの多項式を求めよ。ただし、端点条件は0とせよ。

5 上の表をもとにアキマの多項式を求めよ。

