



第4章 関数近似

第4章 関数近似

- 4.1 最小二乗近似
- 4.2 直交多項式による最小二乗近似
- 4.3 離散的データの最小2乗近似
 - 4.3.1 分点5の最小2乗近似
 - 4.3.2 分点7の最小2乗近似
- 4.4 未定係数法による離散データの最小2乗近似

関数近似

一つの関数を別の関数で置き換えること
離散的な数値から近似式を作ること

例

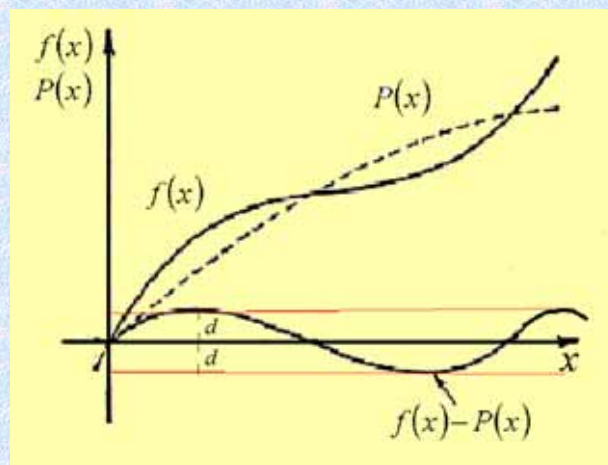
最小2乗近似

MIN - MAX法



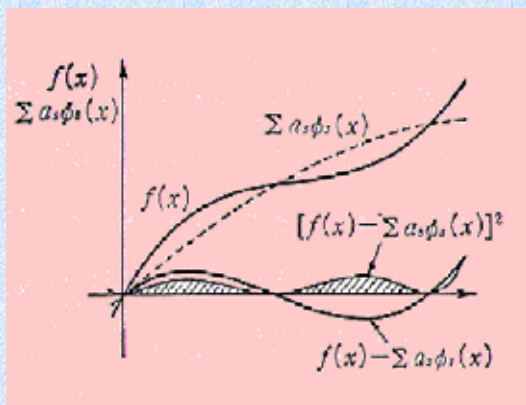
MIN - MAX法

誤差の絶対値の最大値を最小にする



4.1 最小2乗近似

最小2乗近似法 ある与えられたデータと近似値の差の2乗の総和を最小にする方法



・誤差を含むデータを
ごく自然で滑らかな
データに変換する

・任意の関数を別の
直交関数で置き換
える



4.1 最小2乗近似

定義式
$$f(x) \cong \sum_{r=0}^n a_r \phi_r(x)$$

$f(x)$: 被近似関数、区間 $[a, b]$ で連続

a_r : 係数(定数)

$\phi_r(x)$: 直交関数

直交関係式

$$\int_a^b w(x) \phi_r(x) \phi_s(x) dx = \alpha(r) \delta_{rs}$$



直交関係式



$$\int_a^b w(x) \phi_r(x) \phi_s(x) dx = \alpha(r) \delta_{rs}$$

δ_{rs} : クロネッカーのデルタ

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 0 & (r \neq s) \\ 1 & (r = s) \end{cases}$$

$\alpha(r)$: 規格化係数

$w(x)$: 重み係数 (積分の核)



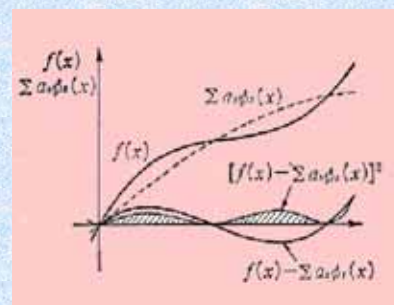
最小2乗近似の係数の導出



区間[a,b]における関数と近似式の2乗誤差は

$$R = \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{s=0}^n a_s \phi_s(x) \right]^2 dx$$

R を最小にする a_r を
求めるには $\partial R / \partial a_r = 0$



最小2乗近似の係数の導出(2)

$$R = \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{s=0}^n a_s \phi_s(x) \right]^2 dx$$

$a_r \phi_r$

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = -2 \int_a^b w(x) \left[f(x) - \sum_{s=0}^n a_s \phi_s(x) \right] \phi_r(x) dx = 0$$

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx = \int_a^b w(x) \left[\sum_{s=0}^n a_s \phi_s(x) \right] \phi_r(x) dx$$

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx = \sum_{s=0}^n a_s \left\{ \int_a^b w(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \right\}$$



最小2乗近似の係数の導出(3)

$$\int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx = \sum_{s=0}^n a_s \left\{ \int_a^b w(x) \phi_s(x) \phi_r(x) dx \right\}$$

$$= \sum_{s=0}^n a_s \alpha(r) \delta_{rs}$$

$\begin{matrix} 0 & 0 & \alpha(r) \delta_{rs} \end{matrix}$

$$= a_0 \alpha(r) \delta_{r0} + a_1 \alpha(r) \delta_{r1} + \dots$$

$$+ a_r \alpha(r) \delta_{rr} + \dots + a_{rn} \alpha(r) \delta_{rn} = a_r \alpha(r)$$

$\begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix}$

$$a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx$$



最小2乗近似式

$$f(x) \cong \sum_{r=0}^n a_r \phi_r(x)$$

$$a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx$$

4.2 直交多項式による最小2乗近似

多項式	積分区間	重み関数	直交関係式
ルジャンドル	$[-1, +1]$	1	$\int_{-1}^{+1} p_r(x) p_s(x) dx = \frac{2}{2r+1} \delta_{rs}$
ラゲル	$[0, \infty)$	e^{-x}	$\int_0^{\infty} L_r(x) L_s(x) e^{-x} dx = (r!)^2 \delta_{rs}$
エルミート	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$\int_{-\infty}^{\infty} H_r(x) H_s(x) e^{-x^2} dx = 2^r r! \sqrt{\pi} \delta_{rs}$
チビシェフ	$[-1, +1]$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\int_{-1}^{+1} T_r(x) T_s(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{rs}$

ルジャンドルの多項式による近似

ルジャンドルの多項式
$$p_r(x) = \frac{1}{2^r r!} \frac{d^r}{dx^r} (x^2 - 1)^r$$

微分方程式
$$(1-x^2)p_r''(x) - 2xp_r'(x) + r(r+1)p_r(x) = 0$$

表 4.1 ルジャンドルの多項式

r	$P_r(x)$	r	$P_r(x)$
0	1	3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
1	x	4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

ルジャンドルの多項式による近似(2)

最小2乗近似

$$f(x) \cong \sum_{r=0}^n a_r p_r(x)$$

例えば、 $p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

係数

$$a_r = \frac{2r+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) p_r(x) dx$$

直交関係式

$$\int_{-1}^{+1} p_r(x) p_s(x) dx = \frac{2}{1} \delta_{rs}$$

一般式
$$a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx$$

ラゲールの多項式による近似

ラゲールの多項式 $L_r(x) = e^x \frac{d^r}{dx^r} (x^r e^{-x})$

微分方程式 $xL_r''(x) + (1-x)L_r'(x) + rL_r(x) = 0$

表 4.2 ラゲールの多項式

r	$L_r(x)$	r	$L_r(x)$
0	1	3	$-x^3 + 9x^2 - 18x + 6$
1	$-x + 1$	4	$x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$
2	$x^2 - 4x + 2$	5	$-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$

ラゲールの多項式による近似 (2)

最小2乗近似

$$f(x) \cong \sum_{r=0}^n a_r L_r(x)$$

係数 $a_r = \frac{1}{(r!)^2} \int_0^\infty e^{-x} f(x) L_r(x) dx$

直交関係式 $\int_0^\infty L_r(x) L_s(x) e^{-x} dx = (r!)^2 \delta_{rs}$

一般式 $a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx$

エルミートの多項式による近似



エルミートの多項式 $H_r(x) = (-1)^r e^{x^2} \frac{d^r}{dx^r} (e^{-x^2})$

微分方程式 $H_r''(x) - 2xH_r'(x) + 2rH_r(x) = 0$

表 4.3

r	$H_r(x)$	r	$H_r(x)$
0	1	3	$8x^3 - 12x$
1	$2x$	4	$16x^4 - 48x^2 + 12$
2	$4x^2 - 2$	5	$32x^5 - 160x^3 + 120x$



エルミートの多項式による近似 (2)



最小2乗近似

$$f(x) \cong \sum_{r=0}^n a_r H_r(x)$$

係数 $a_r = \frac{1}{2^r r! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_r(x) dx$

直交関係式 $\int_{-\infty}^{\infty} H_r(x) H_s(x) e^{-x^2} dx = 2^r r! \sqrt{\pi} \delta_{rs}$

一般式 $a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx$



チェビシェフの多項式による近似

チェビシェフの多項式 $T_r(x) = \cos(r \cos^{-1} x)$

微分方程式 $(1-x^2)T_r''(x) - xT_r'(x) + r^2T_r(x) = 0$

表4.4

r	$T_r(x)$	r	$T_r(x)$
0	1	3	$4x^3 - 3x$
1	x	4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
2	$2x^2 - 1$	5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

一般式 $a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \int_a^b w(x) f(x) \phi_r(x) dx$

最小2乗近似

$$f(x) \cong \sum_{r=0}^n a_r T_r(x)$$

係数

$$a_r = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} T_r(x) dx \quad (r \neq 0)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

直交
関係式

$$\int_{-1}^{+1} T_r(x) T_s(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{rs} \quad (r \neq 0, s \neq 0)$$

$$= \pi \quad (r=s=0)$$

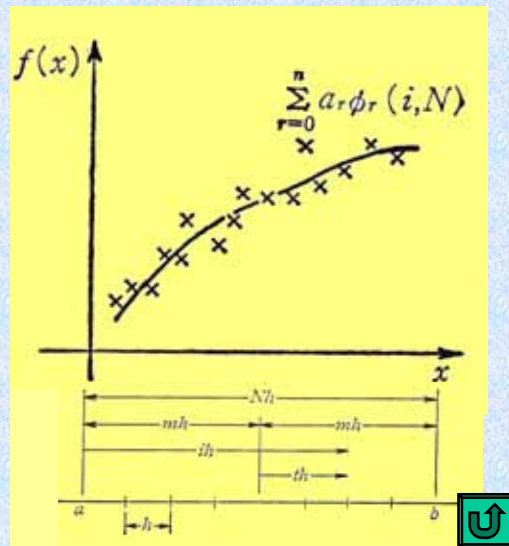
4.3 離散的データの最小2乗近似

離散的データ

測定データ

$$x = a + ih$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, N)$$



離散的データの最小2乗近似(2)

● 離散的な直交多項式の具体的な例

● グラムの多項式

$$p_r(t, 2m) = (-1)^r \sum_{k=0}^r (-1)^k \frac{(r+k)^{(2k)}}{(k!)^2} \cdot \frac{(m+t)^{(k)}}{(2m)^{(k)}}$$

直交関係式

$$\sum_{t=-m}^m p_r(t, 2m) p_s(t, 2m) = \alpha(r) \delta_{rs}$$

離散的データの最小2乗近似(3)

離散型の
最小2乗近似

$$y(t) = \sum_{r=0}^n a_r p_r(t, 2m)$$

$$a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \sum_{t=-m}^m f(t) p_r(t, 2m)$$

連続型の
最小2乗近似

$$f(x) \cong \sum_{r=0}^n a_r p_r(x)$$

$$a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \int_{-1}^{+1} f(x) p_r(x) dx$$



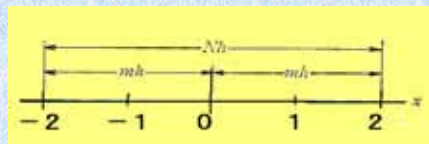
4.3.1 分点5の最小2乗近似

例3 次の表で与えられたデータより近似式を作れ

表 4.6

t	-2	-1	0	1	2
データ: f	3.02	0.98	1.22	2.16	2.61

$$y(t) = \sum_{r=0}^n a_r p_r(t, 2m)$$



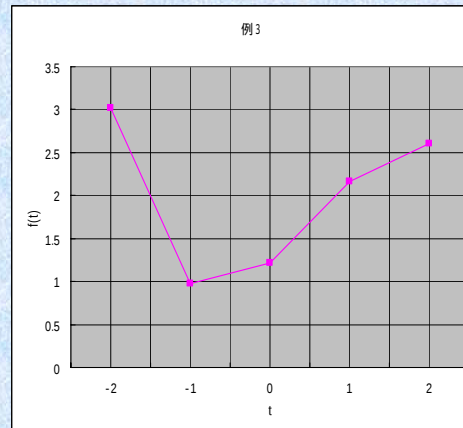
$N = 2m$ であるから、 $m = 2$ となる



例3 次の表で与えられたデータより近似式を作れ

表 4.6

t	-2	-1	0	1	2
データ: f	3.02	0.98	1.22	2.16	2.61



$$y(t) = \sum_{r=0}^n a_r p_r(t, 2m)$$

分点5の最小2乗近似(2)

$$y(t) = \sum_{r=0}^n a_r p_r(t)$$

$$a_r = \frac{1}{\alpha(r)} \sum_{t=-2}^2 f(t) p_r(t)$$

$$\alpha(r) = \sum_{t=-2}^2 \{p_r(t)\}^2$$

$$p_0(t) = 1$$

$$p_1(t) = \frac{t}{2}$$

$$p_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 2)$$

$$p_3(t) = \frac{1}{6}(5t^3 - 17t)$$

直交関係式 $\sum_{t=-m}^m p_r(t, 2m) p_s(t, 2m) = \alpha(r) \delta_{rs}$

分点5の最小2乗近似(3)

$$\alpha(r) = \sum_{t=-2}^2 \{p_r(t)\}^2 = p_r(-2)^2 + p_r(-1)^2 + p_r(0)^2 + p_r(1)^2 + p_r(2)^2$$

$$\left. \begin{aligned} p_0(t) &= 1 \\ p_1(t) &= \frac{t}{2} \\ p_2(t) &= \frac{1}{2}(t^2 - 2) \\ p_3(t) &= \frac{1}{6}(5t^3 - 17t) \end{aligned} \right\}$$

表 4.5

t	p_0	p_1	p_2	p_3	f
-2	1	-1	1	-1	f_{-2}
-1	1	-0.5	-0.5	2	f_{-1}
0	1	0	-1	0	f_0
1	1	0.5	-0.5	-2	f_1
2	1	1	1	1	f_2
α_r	5	2.5	3.5	10	



$$\begin{aligned} a_r &= \frac{1}{\alpha(r)} \sum_{t=-2}^2 f(t) p_r(t, 2m) \\ &= \frac{1}{\alpha(r)} \{ f(-2)p_r(-2) + f(-1)p_r(-1) + f(0)p_r(0) + f(1)p_r(1) + f(2)p_r(2) \} \end{aligned}$$

表 4.6

t	-2	-1	0	1	2
データ: f	3.02	0.98	1.22	2.16	2.61

表 4.5

t	p_0	p_1	p_2	p_3	f
-2	1	-1	1	-1	f_{-2}
-1	1	-0.5	-0.5	2	f_{-1}
0	1	0	-1	0	f_0
1	1	0.5	-0.5	-2	f_1
2	1	1	1	1	f_2
α_r	5	2.5	3.5	10	



表 4.7

t	fp_0	fp_1	fp_2	fp_3
-2	3.02	-3.02	3.02	-3.02
-1	0.98	-0.49	-0.49	1.96
0	1.22	0.00	-1.22	0.00
1	2.16	1.08	-1.08	-4.32
2	2.61	2.61	2.61	2.61
$\sum fp_r$	9.99	0.18	2.84	-2.77
a_r	2.00	0.072	0.81	-0.28

分点5の最小2乗近似(4)

3次近似式

$$y_3(t) = 2.00p_0(t) + 0.072p_1(t) + 0.81p_2(t) - 0.28p_3(t)$$

2次近似式

$$y_2(t) = 2.00p_0(t) + 0.072p_1(t) + 0.81p_2(t)$$

1次近似式

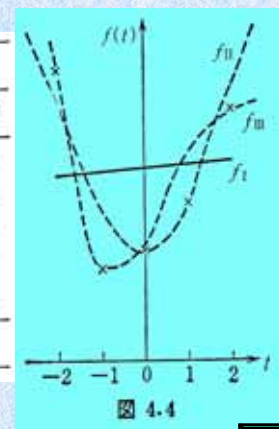
$$y_1(t) = 2.00p_0(t) + 0.072p_1(t)$$



分点5の最小2乗近似(5)

最小2乗近似の誤差評価

t	f	1 次		2 次		3 次	
		f_1	$(f-f_1)^2$	f_2	$(f-f_2)^2$	f_3	$(f-f_3)^2$
-2	3.02	1.93	1.188	2.74	0.0784	3.02	0.0000
-1	0.98	1.96	0.960	1.56	0.3364	1.00	0.0004
0	1.22	2.00	0.608	1.19	0.0009	1.19	0.0009
1	2.16	2.04	0.014	1.63	0.2809	2.19	0.0009
2	2.61	2.07	0.292	2.88	0.0729	2.60	0.0001
E_n		3.062		0.7695		0.0023	



4.3.2 分点7の最小2乗近似

表 4.10

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
データ: f	0.84	3.01	2.67	0.00	0.99	3.68	7.41

表 4.9

t	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
-3	1	-1	1	-1	1	-1	1
-2	1	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	4	-
-1	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	-5	1
0	1	0	$-\frac{4}{5}$	0	2	0	-
1	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{5}$	-1	$\frac{1}{3}$	5	1
2	1	$\frac{2}{3}$	0	-1	$-\frac{2}{3}$	-4	-
3	1	1	1	1	1	1	1
$\sum p_r$	7	3.11	3.36	6	17.11	84.0	9

$$p_0(t) = 1$$

$$p_1(t) = \frac{t}{3}$$

$$p_2(t) = \frac{1}{5}(t^2 - 4)$$

$$p_3(t) = \frac{1}{6}(t^3 - 7t)$$

$$p_4(t) = \frac{1}{36}(7t^4 - 67t^2 + 72)$$

$$p_5(t) = \frac{1}{60}(21t^5 - 245t^3 + 524t)$$



分点7の最小2乗近似(2)

表 4.11

t	fp_0	fp_1	fp_2	fp_3	fp_4	fp_5	fp_6
-3	0.84	-0.84	0.84	-0.84	0.84	-0.84	0.84
-2	3.01	-2.01	0.00	3.01	-7.02	12.04	-18.06
-1	2.67	-0.89	-1.60	2.67	0.89	-13.35	40.05
0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0.99	0.33	-0.59	-0.99	0.33	4.95	14.85
2	3.68	2.45	0.00	-3.68	-8.59	-14.72	-22.08
3	7.41	7.41	7.41	7.41	7.41	7.41	7.41
$\sum fp_r$	18.60	6.46	6.05	7.58	-6.14	-4.51	23.01
a_r	2.66	2.08	1.80	1.26	-0.36	-0.05	0.02

$$y_5(t) = 2.66p_0(t) + 2.08p_1(t) + 1.80p_2(t) + 1.26p_3(t) - 0.36p_4(t) - 0.05p_5(t) + 0.02p_6(t)$$



演習問題 次のデータを用いて最適な3次式を求めなさい。

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-152	-74	-26	-4	4	10	23	57	135

答えは??

4.4 未定係数法による 離散的データの最小2乗近似

離散的データ $(t_k, f_k), (k = 0, 1, \dots, m)$ が
与えられたとき、これを ℓ 次の多項式

$$p_\ell(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_\ell t^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} a_j t^j \quad (m \geq \ell + 1)$$

で最小2乗近似する

2乗誤差の総和が最小となるような係数を求める。

$$E = \sum_{k=0}^m [f_k - p_\ell(t_k)]^2$$

未定係数法による離散的データの最小2乗近似



2乗誤差 $E = \sum_{k=0}^m [f_k - p_\ell(t_k)]^2$

$$\frac{\partial E}{\partial a_r} = \frac{\partial}{\partial a_r} \left[\sum_{k=0}^m \left\{ f_k - \sum_{j=0}^{\ell} a_j t_k^j \right\}^2 \right] = -2 \left[\sum_{k=0}^m \left\{ f_k - \sum_{j=0}^{\ell} a_j t_k^j \right\} t_k^r \right] = 0$$

$$\sum_{j=0}^{\ell} a_j \left(\sum_{k=0}^m t_k^{r+j} \right) = \sum_{k=0}^m f_k t_k^r \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^m t_k^p = T_p \\ \sum_{k=0}^m f_k t_k^p = F_p \end{array} \right.$$

$$\sum_{j=0}^{\ell} a_j T_{r+j} = F_r$$



未定係数法による離散的データの最小2乗近似



$$\sum_{j=0}^{\ell} a_j T_{r+j} = F_r \quad r \leftarrow 0, 1, \dots, \ell$$

連立方程式

離散的データ (t_k, f_k)

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_\ell \\ T_1 & T_2 & T_3 & \cdots & T_{\ell+1} \\ T_2 & T_3 & T_4 & \cdots & T_{\ell+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_\ell & T_{\ell+1} & T_{\ell+2} & \cdots & T_{2\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_\ell \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^m t_k^p = T_p \\ \sum_{k=0}^m f_k t_k^p = F_p \end{array} \right.$$



例5 表4.6を用いて2次の最小2乗近似式を求めよ

表 4.6

t	-2	-1	0	1	2
データ : f	3.02	0.98	1.22	2.16	2.61

$$p_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$T_0 = \sum_{k=-2}^2 t_k^0 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$T_1 = \sum_{k=-2}^2 t_k^1 = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$$

$$T_2 = \sum_{k=-2}^2 t_k^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10$$

$$T_3 = \sum_{k=-2}^2 t_k^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + 1^3 + 2^3 = 0$$

$$T_4 = \sum_{k=-2}^2 t_k^4 = (-2)^4 + (-1)^4 + 0^4 + 1^4 + 2^4 = 34$$



例5 表4.6を用いて2次の最小2乗近似式を求めよ

表 4.6

t	-2	-1	0	1	2
データ : f	3.02	0.98	1.22	2.16	2.61

$$p_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$F_0 = \sum_{k=-2}^2 f_k t_k^0 = 3.02 + 0.98 + 1.22 + 2.16 + 2.61 = 9.99$$

$$F_1 = \sum_{k=-2}^2 f_k t_k^1 = -2 \times 3.02 - 1 \times 0.98 + 0 \times 1.22 + 1 \times 2.16 + 2 \times 2.61 = 0.36$$

$$F_2 = \sum_{k=-2}^2 f_k t_k^2 = (-2)^2 \times 3.02 + (-1)^2 \times 0.98 + 0^2 \times 1.22 + 1^2 \times 2.16 + 2^2 \times 2.61 = 25.66$$



例5 つづき

表 4.6

t	-2	-1	0	1	2
データ : f	3.02	0.98	1.22	2.16	2.61

$$\begin{bmatrix} T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_\ell \\ T_1 & T_2 & T_3 & \cdots & T_{\ell+1} \\ T_2 & T_3 & T_4 & \cdots & T_{\ell+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_\ell & T_{\ell+1} & T_{\ell+2} & \cdots & T_{2\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \cdots \\ F_\ell \end{bmatrix}$$

$$T_0 = 5 \quad F_0 = 9.99$$

$$T_1 = 0 \quad F_1 = 0.36$$

$$T_2 = 10 \quad F_2 = 25.66$$

$$T_3 = 0$$

$$T_4 = 34$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.99 \\ 0.36 \\ 25.66 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = 1.186 \quad a_1 = 0.036 \quad a_2 = 0.406$$



例5 つづき

表 4.6

t	-2	-1	0	1	2
データ : f	3.02	0.98	1.22	2.16	2.61

$$a_0 = 1.186 \quad a_1 = 0.036 \quad a_2 = 0.406$$

$$y = 1.186 + 0.036t + 0.406t^2$$

分点5の最小2乗近似

2次近似式

$$y_2(t) = 2.00p_0(t) + 0.072p_1(t) + 0.81p_2(t)$$

