

6.4 ガウス形の積分公式



エルミートの補間多項式を区間 $[a, b]$ で積分

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n H_k f(x_k) + \sum_{k=0}^n G_k f'(x_k) + R$$

$$\begin{aligned} H_k &= \int_a^b w(x) h_k(x) dx \\ &= \int_a^b w(x) \{1 - 2L'_k(x_k)(x - x_k)\} \{L_k(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

$$G_k = \int_a^b w(x) g_k(x) dx = \int_a^b w(x) (x - x_k) \{L_k(x)\}^2 dx$$

$$R = \frac{1}{(2n+2)!} \int_a^b f^{(2n+2)}(\xi) w(x) \{\pi(x)\}^2 dx \quad (a < \xi < b)$$

ガウス形の積分公式(2)



$$G_k = \int_a^b w(x) L_k(x) \frac{\pi(x)}{\pi_k(x_k)} dx$$

$L_k(x)$ と $\pi(x)$ が直交するように

$x_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ を選ぶと

$$G_k = \frac{1}{\pi_k(x_k)} \int_a^b w(x) L_k(x) \pi(x) dx = 0$$

ガウス形の積分公式(3)



$$H_k = \int_a^b w(x) \{L_k(x)\}^2 dx \\ - 2L'_k(x_k) \int_a^b w(x)(x - x_k) \{L_k(x)\}^2 dx$$

$$G_k = 0 \text{ より}$$

$$H_k = \int_a^b w(x) \{L_k(x)\}^2 dx$$

ガウス形の積分公式(4)



$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^n H_k f(x_k) + R$$

$f(x) = L_k(x)$ を代入

$$\int_a^b w(x) L_k(x) dx = \sum_{i=0}^n H_i L_k(x_i) + R$$

$R = 0, \quad L_k(x_i) = \delta_{ki}$ より

$$\int_a^b w(x) L_k(x) dx = H_k$$

$$H_k = \int_a^b w(x) \{L_k(x)\}^2 dx = \int_a^b w(x) L_k(x) dx$$

6.5.1 ルジャンドル・ガウスの積分公式



積分区間 $[-1, +1]$, $w(x) = 1$

$$\int_{-1}^{+1} L_k(x) \pi(x) dx = 0$$

$$\pi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) = \alpha P_{n+1}(x)$$
$$\alpha = \frac{2^{n+1} [(n+1)!]^2}{(2n+2)!}$$

$$L_k(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \right\} \pi(x) dx = 0$$

直交条件: $\int_{-1}^{+1} P_n(x) x^r dx = 0 \quad (r < n)$

ルジャンドル・ガウスの積分公式(2)

ルジャンドルの多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

ルジャンドル・ガウスの積分公式

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{k=0}^n H_k f(x_k) + R$$

$$H_k = \int_{-1}^{+1} L_k(x) dx$$

$$R = \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^3 (2n+3)} f^{(2n+2)}(\eta)$$

例13 $n=1$ としてルジャンドル・ガウスの
積分公式を求めよ



ルジャンドル・ガウスの積分公式より

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + R$$

分点 x_0, x_1 は $n=1$ であるから

$P_2(x)$ の零点をとるので

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



H_0, H_1 を求めるために3章の例1を用いると

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$H_0 = \int_{-1}^{+1} \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) / \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dx = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_{-1}^{+1} = 1$$

$$H_1 = 1$$

$$R = \frac{2^5 (2!)^4}{(4!)^3 \cdot 5} f^{(4)}(\eta) = \frac{1}{135} f^{(4)}(\eta)$$

例14 3次の多項式の積分 $\int_{-1}^{+1} (x+1)^3 dx$ は
分点2の例13の公式を用いて数値積分
誤差が零となることを確かめよ



$n=1$ のルジャンドル・ガウスの公式より

$$\int_{-1}^{+1} (x+1)^3 dx = 1 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right)^3 = 4$$

解析的な積分も明らかにその値は4となる

6.5.2 その他のガウス形の積分公式

ラゲール・ガウスの積分公式



$$\text{積分区間 } [0, \infty), \quad w(x) = e^{-x}$$

$$G_k = \frac{1}{\pi_k(x_k)} \int_a^b w(x) L_k(x) \pi(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} L_k(x) \pi(x) dx = 0$$

$$\text{直交条件: } \int_{-1}^{+1} e^{-x} x^r L_n(x) dx = 0 \quad (r < n)$$

$L_k(x)$: Lagrange coefficient

$L_n(x)$: Legendre Polinomial₁₆



ラゲール・ガウスの積分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=0}^n H_k f(x_k) + R$$

$$H_k = \int_0^{\infty} e^{-x} L_k(x) dx$$

$$R = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta) \quad (0 < \eta < \infty)$$

ラゲールの多項式 $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$



表 6.5 ラゲール・ガウス積分公式の分点と重み係数

N	k	分点	重み係数
0	0	1.0000000000	1.0000000000
1	0	0.5857864376	0.8535533906
	1	3.4142135624	0.1464466094
2	0	0.4157745568	0.7110930099
	1	2.2942803603	0.2785177336
	2	6.2899450829	0.0103892565
3	0	0.3225476896	0.6031541043
	1	1.7457611012	0.3574186924
	2	4.5366202969	0.0388879085
	3	9.3950709123	0.0005392947
4	0	0.2635603197	0.5217556106
	1	1.4134030591	0.3986668111
	2	3.5964257710	0.0759424497
	3	7.0858100059	0.0036117587
	4	12.6408008443	0.0000233700
5	0	0.2228466042	0.4589646739
	1	1.1889321017	0.4170008308
	2	2.9927363261	0.1133733821
	3	5.7751435691	0.0103991975
	4	9.8374674184	0.0002610172
	5	15.9828739806	0.0000008985

例15 $n=1$ のときラゲール・ガウスの
積分公式を求めよ



ラゲール・ガウスの積分公式より

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + R$$

分点は

$$L_2(x) = x^2 - 4x + 2$$

より, この零点は

$$x = 2 \pm \sqrt{2}, \quad x_0 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_1 = 2 + \sqrt{2}$$



H_0, H_1 はラグランジュの係数を用いて

$$H_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} e^{-x} (x - 2 - \sqrt{2}) dx$$

上式の右辺第1項は部分積分を行うことにより求まる

$$H_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad H_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad R = \frac{(2!)^2}{4!} f^{(4)}(\eta) = \frac{1}{6} f^{(4)}(\eta)$$



・エルミート・ガウスの積分公式

積分区間 $(-\infty, \infty)$, $w(x) = e^{-x^2}$

エルミートの多項式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

直交条件: $\int_{-1}^{+1} e^{-x^2} x^r H_n(x) dx = 0 \quad (r < n)$

エルミート・ガウスの積分公式



$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=0}^n H_k f(x_k) + R$$

$$H_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_k(x) dx$$

$$R = \frac{(n+1)! \sqrt{\pi}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta) \quad (-\infty < \eta < \infty)$$



表 6.6 エルミート・ガウス積分公式の分点と重み係数

N	k	分点	重み係数
0	0	0.0000000000	1.7724538509
1	0	-0.7071067812	0.8862269255
	1	0.7071067812	0.8862269255
2	0	-1.2247448714	0.2954089752
	1	0.0000000000	1.1816359006
	2	1.2247448714	0.2954089752
3	0	-1.6506801239	0.0813128354
	1	-0.5246476233	0.8049140900
	2	0.5246476233	0.8049140900
	3	1.6506801239	0.0813128354
4	0	-2.0201828705	0.0199532421
	1	-0.9585724646	0.3936193232
	2	0.0000000000	0.9453087205
	3	0.9585724646	0.3936193232
	4	2.0201828705	0.0199532421
5	0	-2.3506049737	0.0045300099
	1	-1.3358490740	0.1570673203
	2	-0.4360774119	0.7246295952
	3	0.4360774119	0.7246295952
	4	1.3358490740	0.1570673203
	5	2.3506049737	0.0045300099



・チェビシェフ・ガウスの積分公式

積分区間 $[-1, +1]$, $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

チェビシェフの多項式

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

直交条件: $\int_{-1}^{+1} \frac{x^r}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) dx = 0 \quad (r < n)$

チェビシェフ・ガウスの積分公式



$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) + R$$

$$H_k = \int_{-1}^{+1} \frac{L_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n+1}$$

$$R = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\eta) \quad (-1 < \eta < +1)$$



表 6.7 チェビシェフ・ガウス積分公式の分点と重み係数

N	k	分点	重み係数
0	0	0.0000000000	3.1415926536
1	0	-0.7071067812	1.5707963268
	1	0.7071067812	
2	0	-0.8660254038	1.0471975512
	1	0.0000000000	
	2	0.8660254038	
3	0	-0.9238795325	0.7853981634
	1	-0.3826834324	
	2	0.3826834324	
	3	0.9238795325	
4	0	-0.9510565163	0.6283185307
	1	-0.5877852523	
	2	0.0000000000	
	3	0.5877852523	
	4	0.9510565163	
5	0	-0.9659258263	0.5235987756
	1	-0.7071067812	
	2	-0.2588190451	
	3	0.2588190451	
	4	0.7071067812	
	5	0.9659258263	

6.6 ロンバーグ積分法



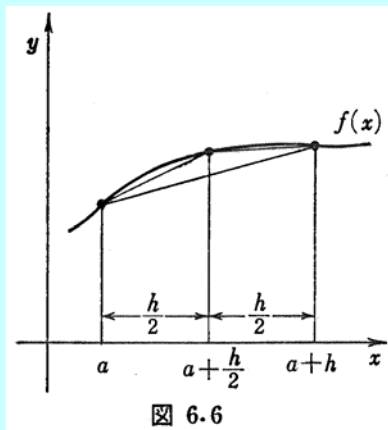
リチャードソンの補外法を積分公式に適用して誤差を逐次減少させていく方法

間隔 h の台形公式

$$\begin{aligned} I = \int_a^{a+h} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] \\ &\quad - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi_1) + \frac{1}{720} h^5 f^{(4)}(\eta_1) - \dots \\ &\quad (a < \xi_1, \eta_1, \dots, < a+h) \end{aligned}$$



区間hを2分割して台形公式を2回適用



$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^{a+2 \cdot h/2} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \\
 &\times \left[f(a) + f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right] \\
 &- \frac{2}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_2) + \frac{2}{720} h^5 f^{(4)}(\eta_2) - \dots \\
 &\quad (a < \xi_2, \eta_2, \dots, < a+h)
 \end{aligned}$$

... (ii)

ロンバーグ積分法(3)



$$I = \int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] \\ - \frac{1}{12} h^3 f''(\xi_1) + \frac{1}{720} h^5 f^{(4)}(\eta_1) - \dots$$

$$I = \int_a^{a+2 \cdot h/2} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \times \left[f(a) + f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right] \\ - \frac{2}{12} \left(\frac{h}{2}\right)^3 f''(\xi_2) + \frac{2}{720} h^5 f^{(4)}(\eta_2) - \dots$$

(ii) × 4 - (i)

$$I = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{2}\right) \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + f(a+h) \right] \\ - \frac{1}{2880} h^5 f^{(4)}(\eta_1) + \frac{1}{96768} h^7 f^{(6)}(\zeta_1) - \dots$$

$$f''(\xi_1) = f''(\xi_2), \quad f^{(4)}(\eta_1) = f^{(4)}(\eta_2)$$



前の式で $h_1 = h/2$ とすると

$$I = \int_a^{a+2h_1} f(x)dx = \frac{h_1}{3} [f(a) + 4f(a+h_1) + f(a+2h_1)]$$

$$- \frac{1}{90} h_1^5 f^{(4)}(\eta_1) + \frac{1}{756} h_1^7 f^{(6)}(\zeta_1) - \dots \quad (\text{iii})$$

$$(a < \eta_1, \zeta_1, \dots, < a + 2h_1)$$

シンプソンの1/3則



区間 h_1 を2分割してシンプソン公式を
2回適用し h_1^5 を消去

$$\begin{aligned}
 I = \int_a^{a+4 \cdot h_1/2} f(x) dx &= \frac{1}{3} \left(\frac{h_1}{2} \right) \left[f(a) + 4 f\left(a + \frac{h_1}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 f(a + h_1) + 4 f\left(a + \frac{3}{2} h_1\right) + f(a + 2h_1) \right] \\
 &\quad - \frac{2}{90} \left(\frac{h_1}{2} \right)^5 f^{(4)}(\eta_3) + \frac{2}{756} \left(\frac{h_1}{2} \right)^7 f^{(6)}(\zeta_3) - \dots
 \end{aligned}$$

... (iv)₃₄



(iv) $\times 4^2 -$ (iii)

$$\begin{aligned}
 I = \int_a^{a+2h_1} f(x) dx &= \frac{h_1}{45} \left[7f(a) + 32f\left(a + \frac{h_1}{2}\right) + 12f(a + h_1) \right. \\
 &\quad \left. + 32f\left(a + \frac{3}{2}h_1\right) + 7f(a + 2h_1) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{15120} \left(\frac{h_1}{2}\right)^7 f^{(6)}(\zeta_3) + \dots \\
 &\quad (a < \zeta_3, \dots < a + 2h_1)
 \end{aligned}$$

ニュートン・コーツの4次の積分公式



・ロンバーグ法のアルゴリズム

$$P_{0,0} = \frac{h_0}{2} [f(a) + f(a+h)] \quad (h_0 = h)$$

$$P_{k,0} = \frac{h_k}{2} \left[f(a) + 2 \sum_{r=1}^{2^k-1} f(a+rh_k) + f(a+h) \right] \quad \left(h_k = \frac{h}{2^k} \right)$$

$$P_{k,m} = \frac{4^m P_{k,m-1} - P_{k-1,m-1}}{4^m - 1} \quad (k, m = 1, 2, 3, \dots)$$



表 6.8

$k \backslash m$	0	1	2	3	
0	$P_{0,0}$				
1	$P_{1,0} \rightarrow P_{1,1}$				
2	$P_{2,0} \rightarrow P_{2,1} \rightarrow P_{2,2}$				
3	$P_{3,0} \rightarrow P_{3,1} \rightarrow P_{3,2} \rightarrow P_{3,3}$				
$\vdots$	$\vdots \rightarrow \vdots \rightarrow \vdots \rightarrow \vdots \rightarrow \vdots$				

例16 ロンバーク積分公式を用いて表6.9より
 積分 $\int_{2.00}^{2.80} f(x)dx$ を小数点以下5桁まで
 正確に求めよ



表 6.9

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.00	7.3890561	2.30	9.9741825	2.60	13.4637380
2.05	7.7679011	2.35	10.4855697	2.65	14.1540387
2.10	8.1661699	2.40	11.0231764	2.70	14.8797317
2.15	8.5848584	2.45	11.5883467	2.75	15.6426319
2.20	9.0250135	2.50	12.1824940	2.80	16.4446468
2.25	9.4877358	2.55	12.8071038		

全区間に台形公式を適用して

$$P_{0,0} = \frac{0.8}{2} [7.3890561 + 16.4446468] = 9.5334811$$



$h_1 = 0.4$ として

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= \frac{0.4}{2} [7.3890561 + 2 \times 11.0231764 + 16.4446468] \\ &= 9.1760110 \end{aligned}$$

したがって

$$P_{1,1} = \frac{4P_{1,0} - P_{0,0}}{4-1} = 9.0568543$$



$h_1 = 0.2$ として

$$P_{2,0} = \frac{0.2}{2} [7.3890561 + 2 \times (9.0250135 + 11.0231764 + 13.4637380) + 16.4446468] = 9.0857558$$

したがって

$$P_{2,1} = \frac{4P_{2,0} - P_{1,0}}{4 - 1} = 9.0556707$$

$$P_{2,2} = \frac{4^2 P_{2,1} - P_{1,1}}{4^2 - 1} = 9.0555917$$



第 m 次と $m+1$ 次の差を E とすると

$$E = |P_{2,2} - P_{2,1}| = 0.0000790$$

要求される精度 0.5×10^{-5} 以下であるため
次の段階の計算を行う

$$P_{3,1} = 9.0631358, \quad P_{3,1} = 9.0555958, \quad P_{3,2} = 9.0555908$$

$$P_{3,3} = \frac{4^3 P_{3,2} - P_{2,2}}{4^3 - 1} = 9.0555907$$

この値はつぎのように指定制度を充分満足する

$$E = |P_{3,3} - P_{3,2}| = 0.1 \times 10^{-6} < 0.5 \times 10^{-5}$$