



第7章 連立1次方程式

行列算法



第7章 連立1次方程式

7.1 行列とその古典的解法

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots+a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots+a_{2n}x_n & =b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\cdots+a_{nn}x_n & =b_n \end{array} \right. \quad (7.1)$$





$$Ax = b \quad (7.2)$$

A : 係数行列 x, b : 列ベクトル

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$





正方行列, 転置行列, 対称行列, 交代行列

正方行列: A の行と列の数が等しいとき

転置行列: A^t 行列の行と列の要素が代わる

対称行列: A が正方行列で $A^t = A$ のとき

交代行列: $A^t = -A$ のとき

対角行列: 行列 A の非対角要素が 0 のとき

単位行列: 対角行列で対角要素が全て
1 の行列





行列のトレース

トレース 正方行列 A の対角要素の和を
 A のトレースという

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$





クラメールの解法

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$





7.2 消去法

7.2.1 上三角方程式の解法

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = b_1 \\ \\ u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \dots\dots\dots \\ \\ u_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

$$Ux = b$$



上三角方程式の解法

$$Ux = b$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$





上三角方程式の解法

$$x_n = b_1 / u_{nn}$$

$$x_i = \frac{b_1 - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k}{u_{ii}}$$

$$i = n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$$





例1 次の方程式を解け

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ x_2 + 2x_3 = 3 & (2) \\ 2x_3 = 2 & (3) \end{array} \right.$$





$$2x_3 = 2 \quad \dots (3)$$

まず、式(3)より $x_3 = 1$

$$x_2 + 2x_3 = 3 \quad \dots (2)$$

これを式(2)に代入して $x_2 = 3 - 2 \times 1 \times 1$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \dots (1)$$

x_2, x_3 を式(1)に代入して

$$x_1 = (0 - 1 - 2 \times 1) / 3 = -1$$

解 $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$





7.2.2 ガウス (Gauss) の消去法

連立方程式 $Ax = b$ の解法で

初期値を $A^{(0)} = A, b^{(0)} = b$

$$\left. \begin{aligned} a_{jk}^{(l)} &= a_{jk}^{(l-1)} - (a_{jl}^{(l-1)} / a_{ll}^{(l-1)}) a_{lk}^{(l-1)} \\ b_j^{(l)} &= b_j^{(l-1)} - (a_{jl}^{(l-1)} / a_{ll}^{(l-1)}) b_l^{(l-1)} \end{aligned} \right\} \quad (j > l, k \geq l)$$

(7 . 8)

$$a_{jk}^{(l)} = -a_{jl}^{(l-1)}$$

$$b_j^{(l)} = -b_j^{(l-1)}$$





例2 次の方程式をガウスの消去法で解け。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

拡大行列



解



操作回数

A

b

操作

$$l=0 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{matrix}$$

$$l=1 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix}$$

第2行 - 第1行 $\times (-1/2)$

第3行 - 第1行 $\times (1/2)$



解



操作回数

A

b

操作

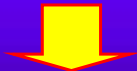
$$l=1 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix} \times \frac{\frac{11}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \begin{matrix} 0 & -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} & -22 \end{matrix}$$

$$l=2 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix} \quad \text{第3行} - \text{第2行} \times \frac{\frac{11}{2}}{\frac{1}{2}}$$



解 得られた拡大行列

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 2 \\ 5x_3 = -15 \end{cases}$$





$$5x_3 = -15$$

上式より

$$x_3 = -3$$

$$\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 2$$

$x_3 = -3$ を代入し、 $\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}$

$$x_2 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2$$

$x_3 = -3, x_2 = 1$ を代入

$$2x_1 - 1 - 3 \times 3 = -2$$

$$x_1 = 4$$



基本行列

(a)

$P(i, j, c)$: 対角要素 = 1 , $a_{ij} = c$, 残りの要素 = 0 , $i \neq j$

$$P(1, 2; c) = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P(3, 1; c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$R(i, c)$: 対角要素が a_{ii} を除いて 1 , $a_{ii} = c$, $c \neq 0$
残りの要素 = 0

$$R(1; c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R(3; c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$



基本行列(2)



$$\begin{aligned} P(1,2;c)A &= \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + ca_{21} & a_{12} + ca_{22} & a_{13} + ca_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(3;c)A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



 $l=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

 $l=1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix}$$

第2行 - 第1行 $\times (-1/2)$ 第3行 - 第1行 $\times (1/2)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$

第3行 - 第2行 $\times \frac{11}{\frac{2}{1/2}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \text{最終形}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P(3,2;-11)P(3,1;-1/2)P(2,1;1/2)A \Rightarrow \text{最終形}$$





7.2.3 ガウス・ジョルダン法 (Gauss-Jordan)

$$Ax = b$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b'_n \end{bmatrix}$$

変形する





初期値を $A^{(0)} = A, \quad b^{(0)} = b$

$$a_{jk}^{(l)} = a_{jk}^{(l-1)} - a_{jl}^{(l-1)} a_{lk}^{(l-1)} / a_{ll}^{(l-1)} \quad (1 \leq j \leq n, j \neq l, l \leq k)$$

$$a_{lk}^{(l)} = a_{lk}^{(l-1)} / a_{ll}^{(l-1)} \quad (k \geq l) \quad (7.9a)$$

$$a_{jk}^{(l)} = a_{jk}^{(l-1)} \quad (k < l)$$

$$b_j^{(l)} = b_j^{(l-1)} - a_{jl}^{(l-1)} b_l^{(l-1)} / a_{ll}^{(l-1)} \quad (1 \leq j \leq n, j \neq l)$$

$$b_l^{(l)} = b_l^{(l-1)} / a_{ll}^{(l-1)} \quad (7.9b)$$





例3 次の方程式をガウス・ジョルダン法で解け。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$l=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

第1行を2で割る

$l=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

第1行 $\times (1/2)$



$$l=1 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

第1行を足す

第1行を引く

$$l=2 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix}$$

第2行 - 第1行 $\times (-1)$

第3行 - 第1行 $\times (1)$

$$l=3 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix}$$

第2行を2倍する

第2行 $\times [1/(1/2)]$





$$l=3 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11/2 & -1/2 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & -11/2 & 11/2 & -22 \end{matrix}$$

$$l=4 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -15 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{第1行 - 第2行} \times (-1/2) \\ \text{第3行 - 第2行} \times (11/2) \end{matrix}$$

$$l=5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

第3行を5で割る

第3行 $\times (1/5)$





$l=5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{matrix}$$

$l=6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

第1行 - 第3行 $\times (1)$

第2行 - 第3行 $\times (-1)$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 4$$

$$x_3 = -3$$



例3B 次の方程式をガウス・ジョルダン法で解け。

$$\begin{cases} 33x_1 + 16x_2 + 72x_3 = -359 \\ -24x_1 - 10x_2 - 57x_3 = 281 \\ -8x_1 - 4x_2 - 17x_3 = 85 \end{cases}$$

$$l=0 \quad \begin{bmatrix} 33 & 16 & 72 & -359 \\ -24 & -10 & -57 & 281 \\ -8 & -4 & -17 & 85 \end{bmatrix}$$

$$l=1 \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{16}{33} & \frac{72}{33} & -\frac{359}{33} \\ -24 & -10 & -57 & 281 \\ -8 & -4 & -17 & 85 \end{bmatrix}$$

33で割る





$l=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{16}{33} & \frac{72}{33} & -\frac{359}{33} \\ -24 & -10 & -57 & 281 \\ -8 & -4 & -17 & 85 \end{bmatrix}$$

24倍して足す

8倍して足す

$l=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{16}{33} & \frac{72}{33} & -\frac{359}{33} \\ 0 & \frac{54}{33} & -\frac{153}{33} & \frac{657}{33} \\ 0 & -\frac{4}{33} & -\frac{15}{33} & -\frac{67}{33} \end{bmatrix}$$

$\frac{33}{54}$ 倍する

$l=3$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{16}{33} & \frac{72}{33} & -\frac{359}{33} \\ 0 & 1 & -\frac{54}{33} & \frac{33}{33} \\ 0 & -\frac{4}{33} & -\frac{15}{33} & -\frac{67}{33} \end{bmatrix}$$



$l=3$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{16}{33} & \frac{72}{33} & -\frac{359}{33} \\ 0 & 1 & -\frac{153}{54} & \frac{657}{33} \\ 0 & -\frac{4}{33} & -\frac{15}{33} & -\frac{67}{33} \end{bmatrix}$$

$l=4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6336}{1782} & -\frac{29898}{1782} \\ 0 & 1 & -\frac{153}{54} & \frac{657}{54} \\ 0 & 0 & -\frac{198}{1782} & -\frac{990}{1782} \end{bmatrix}$$

$l=5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6336}{1782} & -\frac{29898}{1782} \\ 0 & 1 & -\frac{153}{54} & \frac{657}{54} \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$



$l=5$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{6336}{1782} & -\frac{29898}{1782} \\ 0 & 1 & -\frac{153}{54} & \frac{657}{54} \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$l=6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = -5$$



7.3 係数行列を分解する方法

$$A = LU$$

下三角行列

上三角行列

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad (7.11)$$





$$Ax = b$$

$$A = LU$$

$$LUx = b$$

$$Ly = b$$

$$Ux = y$$

A



三角分解



y



x





7.3.1 クラウト(Crout)法

対角要素を1とする

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

既知の数 n^2

未知数 $n^2 / 2 + n$

未知数 $n^2 / 2 - n$



7.3.1 クラウト(Crout)法

$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad (7.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{kk} = 1 \\ l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} u_{mk} \quad (k \leq l \leq n) \\ u_{kj} = (a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}) / u_{kk} \quad (k+1 \leq j \leq n) \\ l_{ik} = 0 \quad (i < k) \\ u_{kj} = 0 \quad (j < k) \end{array} \right. \quad (7.13)$$



クラウト法

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (7.14)$$

$$x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \quad (1 \leq i \leq n) \quad (7.15)$$





例4 次の方程式をクラウト法で解け。

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$l=0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{11} で割る



そのまま

$l=1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & * & 0 \\ 1 & * & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l=1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & * & 0 \\ 1 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l=2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 11/2 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$l=3 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 11/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 11/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b$$

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 11/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$



$$Ly = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 11/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$2 y_1 = -2$$

$$y_1 = -2 / 2 = -1$$

$$-1 \times (-1) + \frac{1}{2} y_2 = 3$$

$$y_2 = 2 \times (3 - 1) = 4$$

$$(-1) + \frac{11}{2} \times 4 + 5 y_3 = 6$$

$$y_3 = \frac{1}{5} \left(6 + 1 - \frac{11}{2} \times 4 \right) = -3$$



$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = -3$$

$$x_3 = -3$$

$$x_2 - (-3) = 4$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 - \frac{1}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times (-3) = -1$$

$$x_1 = 4$$



7.3.2 コレスキー (Cholesky) 法

対称行列

$$A = U^t U$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

未知数 $n^2 / 2$

既知の数 $n^2 / 2$

上三角行列

上三角行列の転置行列



コレスキー (Cholesky) 法

$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} u_{ik} u_{kj} = a_{ij} \quad (7.17)$$

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}} \quad (2 \leq j < n)$$

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2} \quad (2 \leq j < n) \quad (7.18)$$

$$u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}) / u_{kk} \quad (i+1 \leq j \leq n, 2 \leq i < n)$$

$$u_{ij} = 0 \quad (i > j)$$





例5 次の方程式をコレスキー法で解け。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 17x_3 = 17 \end{cases}$$

$$l=0 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

$$l=1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$u_{11}=1$$



基の式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

$$l=2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & 0 \\ 3 & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{12}=2 \\ u_{13}=3 \end{matrix}$$

$$l=3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{matrix} u_{22}=1 \\ u_{23}=-2 \end{matrix}$$

$$l=4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} u_{33}=2$$





$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b$$

$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 17 \end{bmatrix}$$





$$Ly = b \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1$$

$$y_1 = 1$$

$$2 \times 1 + y_2 = -3$$

$$y_2 = -3 - 2 = -5$$

$$3 \times 1 - 2 \times (-5) + 2 \times y_3 = 17$$

$$y_3 = (17 - 3 - 10) / 2 = 2$$



$$Ux = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2x_3 = 2$$

$$x_3 = 1$$

$$x_2 - 2 \times 1 = -5$$

$$x_2 = -5 + 2 = -3$$

$$x_1 + 2 \times (-3) + 3 \times 1 = 1$$

$$x_1 = 1 + 6 - 3 = 4$$

$$\text{解} \quad x_1 = 4, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 1$$

