第7章　連立1次方程式

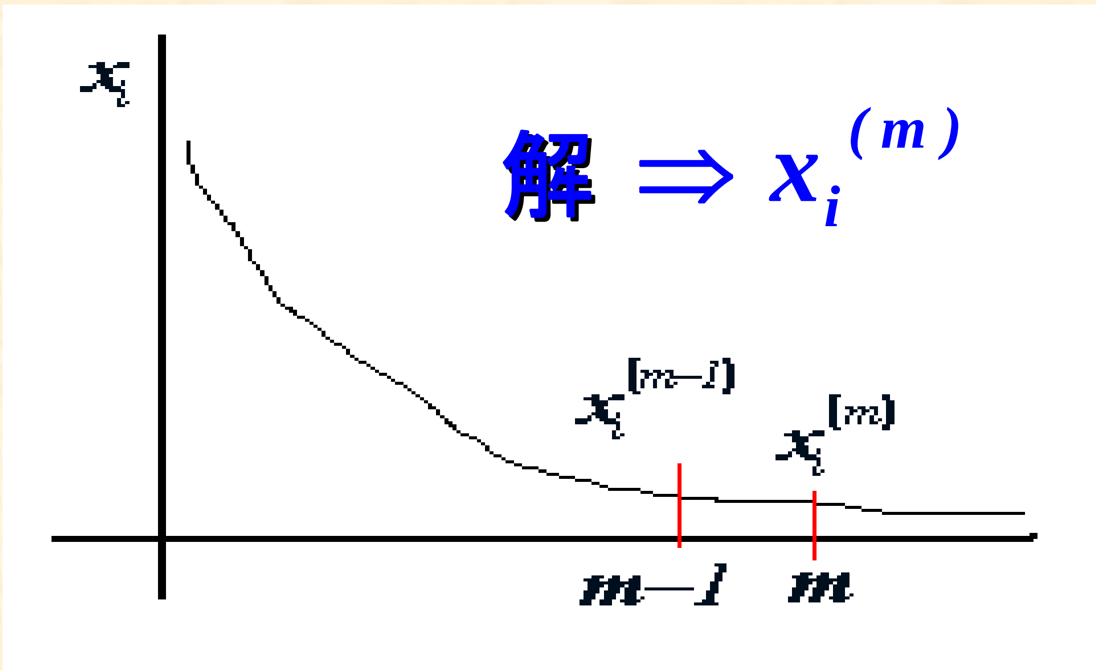
7．4　反復法

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{x}^{(0)}$$ ：初期ベクトル

反復の停止条件

$$\left| x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)} \right| < e \quad (1 \le i \le n) \quad (7.20)$$

$x_i^{(m)} \Rightarrow m$回目の計算で求めた値



反復停止条件 x_i の値が小さいとき

$$\left| x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)} \right| < e \left| x_i^{(m)} \right| \qquad (1 \le i \le n)$$

停止条件 $x_i < 1$ の場合

$x_i^{(m)} \Rightarrow m$回目の計算で求めた値

$x_i^{(m)} \Rightarrow$ 解

7．4．1　ヤコビ（Jacobi）法

$$
\begin{aligned}
\underline{a_{11}x_1^{(m+1)}} + a_{12}x_2^{(m)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(m)} &= b_1 \\
a_{21}x_1^{(m)} \underline{+ a_{22}x_2^{(m+1)}} + \cdots + a_{2n}x_n^{(m)} &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1^{(m)} + a_{n2}x_2^{(m)} + \cdots + \underline{a_{nn}x_n^{(m+1)}} &= b_n
\end{aligned}
\tag{7.21}
$$

$(m) \Rightarrow$ 反復回数

ヤコビ法2

$$
\begin{array}{l}
\underline{a_{11}x_1^{(1)}} + a_{12}x_2^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)} = b_1 \\
a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(0)} = b_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(1)} = b_n
\end{array}
$$

$$a_{11}x_1^{(1)} = b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(0)}$$

ヤコビ法3

$$
\begin{aligned}
\underline{a_{11}x_1^{(2)}} + a_{12}x_2^{(1)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(1)} &= b_1 \\
a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(2)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(1)} &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1^{(1)} + a_{n2}x_2^{(1)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(2)} &= b_n
\end{aligned}
$$

$$
a_{11}x_1^{(2)} = b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(1)}
$$

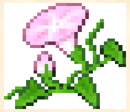
ヤコビの反復公式

$$x_i^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \text{初期値}$$

$$x_i^{(m+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right) / a_{ii}$$

例６　ヤコビ法を適用して解を求めよ

$$
\begin{cases}
10x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\
-2x_1 + 20x_2 - x_3 = -24 \\
2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 14
\end{cases}
$$



例6の解答－1

$$\begin{cases} 10x_1 - 0 + 0 = 13 \\ -2\times 0 + 20x_2 - 0 = -24 \\ 2\times 0 - 2\times 0 + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$x_1 = 13/10 \Rightarrow 1.3$

$x_2 = -24/20 \Rightarrow -1.2$

$x_3 = 14/5 \Rightarrow 2.8$

$x_1 = 1.3$

$x_2 = -1.2$

$x_3 = 2.8$

例6の解答－2

$$\begin{cases} 10x_1 - (-1.2) + 2.8 = 13 \\ -2\times 1.3 + 20x_2 - 2.8 = -24 \\ 2\times 1.3 - 2\times(-1.2) + 5x_3 = 14 \end{cases}$$

$$x_1 = 1.3$$

$$x_2 = -1.2$$

$$x_3 = 2.8$$

$$10x_1 = 13 - 1.2 - 2.8 \qquad x_1 = 0.9$$

$$20x_2 = -24 + 2.6 + 2.8 \qquad x_2 = -0.93$$

$$5x_3 = 14 - 2.6 - 2.4 \qquad x_3 = 1.8$$

計算結果（ヤコビ法）

反復回数	x_1	x_2	x_3
0	0. 000000000	0. 000000000	0. 000000000
1	1. 300000000	－1. 200000000	2. 800000000
2	0. 900000000	－0. 930000000	1. 800000000
3	1. 027000000	－1. 020000000	2. 068000000
4	0. 991200000	－0. 993900000	1. 981200000
5	1. 002490000	－1. 001820000	2. 005960000
6	0. 999222000	－0. 999453000	1. 998276000
7	1. 000227100	－1. 000164000	2. 000530000
8	0. 999930600	－0. 999950790	1. 999843560
9	1. 000020565	－1. 000014762	2. 000047444
10	0. 999993779	－0. 999995571	1. 999985869

ガウス・ザイデル(Gauss-seidel)法

$$
\begin{aligned}
\underline{a_{11}x_1^{(m+1)}} + a_{12}x_2^{(m)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(m)} &= b_1 \\
\underline{a_{21}x_1^{(m+1)}} + \underline{a_{22}x_2^{(m+1)}} + \cdots + a_{2n}x_n^{(m)} &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\quad \vdots \\
\underline{a_{n1}x_1^{(m+1)}} + \underline{a_{n2}x_2^{(m+1)}} + \cdots + \underline{a_{nn}x_n^{(m+1)}} &= b_n
\end{aligned}
\tag{7.23}
$$

$(m) \Rightarrow$ 反復回数

ガウス・ザイデルの反復公式

$$x_i^{(0)} = 0 \quad \Rightarrow \text{初期値}$$

$$x_i^{(m+1)} = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{(m+1)} - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k^{(m)} \right) / a_{ii}$$

例7　計算結果（ガウス・ザイデル法）

反復回数	x_1	x_2	x_3
０	０．０００００００００	０．０００００００００	０．０００００００００
１	１．３０００００００	－１．０７００００００	１．８５２００００００
２	１．００７８０００００	－０．００６６２００００	１．９９４２３２０００
３	０．９９９９１４８００	－１．０００２９６９２０	１．９９９９１５３１２
４	０．９９９９７８７７７	－１．０００００６３５７	２．０００００５９４７
５	０．９９９９９８７７０	－０．９９９９９９８２６	２．００００００５６２
６	０．９９９９９９９６１	－０．９９９９９９９７６	２．０００００００２５
７	１．０００００００００	－０．９９９９９９９９９	２．００００００００１