

第7章 連立1次方程式

7. 6 固有値

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

$\lambda \Rightarrow$ 固有値

$x \Rightarrow$ 固有ベクトル

7. 6 固 有 值(1)

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$|\lambda I - A| = 0 \quad \text{固 有 方 程 式}$$



$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{m=1}^n c_m \lambda^{n-m}$$

$$P(\lambda) = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - c_2 \lambda^{n-2} - \cdots - c_{n-1} \lambda - c_0$$



7. 6. 1 フレーム法

$$P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{m=1}^n c_m \lambda^{n-m}$$

$$A_0 = I \quad (7.42)$$

$$c_m = \text{tr}(AA_{m-1}) / m \quad (7.43)$$

$$A_m = AA_{m-1} - c_m I \quad (7.44)$$



フレーム法(2)

$$A_m = AA_{m-1} - c_m I$$

$$A_n = AA_{n-1} - c_n I = 0 \quad (7.42)$$

$$|A| = (-1)^{n-1} c_n \quad (7.43)$$

$$A^{-1} = A_{n-1} / c_n \quad (7.44)$$



例11 次の行列の固有値を フレイム法で求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \\ -8 & -4 & -17 \end{bmatrix}$$

m	A_{m-1}	AA_{m-1}	c_m
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \\ -8 & -4 & -17 \end{bmatrix}$	$c_1 = (33 - 10 - 17) / 1$ $= 6$



m	A_{m-1}	AA_{m-1}	c_m
1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 33 & 16 & 72 \\ -24 & -10 & -57 \\ -8 & -4 & -17 \end{bmatrix}$	$c_1 = (33 - 10 - 17) / 1 = 6$
2	$\begin{bmatrix} 27 & 16 & 72 \\ -24 & -16 & -57 \\ -8 & -4 & -23 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -69 & -16 & -192 \\ 48 & 4 & 153 \\ 16 & 4 & 43 \end{bmatrix}$	$c_2 = (-69 + 4 + 43) / 2 = -22 / 2 = -11$
3	$\begin{bmatrix} -58 & -16 & -192 \\ 48 & 15 & 153 \\ 16 & 4 & 54 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	$c_3 = (6 + 6 + 6) / 3 = 6$



$$P(\lambda) = \lambda^n - c_1 \lambda^{n-1} - c_2 \lambda^{n-2} - \dots - c_{n-1} \lambda - c_0$$

$$c_1 = 6 \quad c_2 = -11 \quad c_3 = 6$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \end{aligned}$$

固有值 $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$

