

7. 6. 2 ヤコビ法

$$B = JAJ^{-1} \Rightarrow \text{相似変換}$$

実対称行列

$$J_3 J_2 J_1 A J_1^{-1} J_2^{-1} J_3^{-1}$$

対角行列

$$J_n J_{n-1} \cdots J_2 J_1 A J_1^{-1} J_2^{-1} \cdots J_{n-1}^{-1} J_n^{-1} = D$$



$$B = JAJ^{-1}$$

$J \Rightarrow$ ヤコビの回転行列

直交行列

$$T^t T = I$$

$$J^{-1} = J^t$$

$$B = JAJ^t$$

直交変換



$$B = JAJ^t$$

行列Bの i, j 要素を零にするため

$$b_{ij} = 0, \quad b_{ji} = 0$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i, i 要素に $\cos\theta$

j, j 要素に $\cos\theta$

i, j 要素に $\sin\theta$

j, i 要素に $-\sin\theta$



ヤコビの回転行列

i 列

j 列 ヤコビ法4

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i \text{ 行} & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j \text{ 行} & 0 & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$B = JAJ^t$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{34} \\ b_{14} & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例として2, 3要素を零にする

$$b_{23} = b_{32} = 0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cos\theta + a_{13}\sin\theta & -a_{12}\sin\theta + a_{13}\cos\theta & a_{14} \\ a_{12} & a_{22}\cos\theta + a_{23}\sin\theta & -a_{22}\sin\theta + a_{23}\cos\theta & a_{24} \\ a_{13} & a_{23}\cos\theta + a_{33}\sin\theta & -a_{23}\sin\theta + a_{33}\cos\theta & a_{34} \\ a_{14} & a_{24}\cos\theta + a_{34}\sin\theta & -a_{24}\sin\theta + a_{34}\cos\theta & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_{23} &= -a_{22}\sin\theta\cos\theta + a_{23}(\cos\theta)^2 - a_{23}(\sin\theta)^2 + a_{33}\cos\theta\sin\theta \\ &= \{(a_{33} - a_{22})\sin 2\theta\} / 2 + a_{23}\cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$



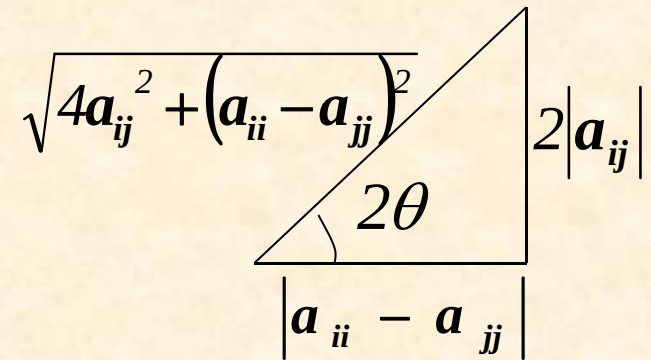
$$b_{23} = \{(a_{33} - a_{22})\sin 2\theta\} / 2 + a_{23} \cos 2\theta = 0$$

ヤコビ法6

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}} \qquad \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2a_{23}}{a_{22} - a_{33}}$$

一般的に

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \quad (7.49)$$



$$\cos 2\theta = |a_{ii} - a_{jj}| / \sqrt{4a_{ij}^2 + (a_{ii} - a_{jj})^2}$$



$$\cos 2\theta = |a_{ii} - a_{jj}| / \sqrt{4a_{ij}^2 + (a_{ii} - a_{jj})^2}$$

倍角の公式 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$

$$\cos \theta = \sqrt{(1 + \cos 2\theta) / 2}$$

倍角の公式 $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta$

$$\sin \theta = \sqrt{(1 - \cos 2\theta) / 2} \times \operatorname{sgn}(a_{ij}) \times \operatorname{sgn}(a_{ii} - a_{jj})$$

$$\sin \theta = \operatorname{sgn}(a_{ij}) \operatorname{sgn}(a_{ii} - a_{jj}) \sqrt{(1 - \cos 2\theta) / 2}$$



$$b_{k\ell} = a_{k\ell} \quad (k, \ell \neq i, j)$$

$$b_{ik} = b_{ki} = a_{ki} \cos \theta + a_{kj} \sin \theta \quad (k \neq i, j)$$

$$b_{kj} = b_{jk} = -a_{ki} \sin \theta + a_{kj} \cos \theta \quad (k \neq i, j)$$

$$b_{ii} = a_{jj} \sin^2 \theta + a_{ii} \cos^2 \theta + 2a_{ij} \sin \theta \cos \theta$$

$$b_{jj} = a_{jj} \cos^2 \theta + a_{ii} \sin^2 \theta - 2a_{ij} \sin \theta \cos \theta$$

$$b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}(a_{jj} - a_{ii}) \sin 2\theta + 2a_{ij} \cos 2\theta$$



例12 ヤコビ法を用いて次の対称行列の固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

非対角要素の絶対値が最大のものは a_{23} であるから

$$\cos 2\theta = |a_{ii} - a_{jj}| / \sqrt{4a_{ij}^2 + (a_{ii} - a_{jj})^2}$$

$$\cos 2\theta = |5 - (-3)| / \sqrt{4 \times 3^2 + (5 + 3)^2} = \frac{8}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{4}{5}$$



$$\cos 2\theta = \frac{4}{5}$$

$$\cos\theta = \sqrt{(1+4/5)/2} = 3/\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \operatorname{sgn}(3)\operatorname{sgn}(5-(-3))\sqrt{(1-4/5)/2} \\ &= 1/\sqrt{10}\end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5/\sqrt{10} & -5/\sqrt{10} \\ 2 & 18/\sqrt{10} & 4/\sqrt{10} \\ -1 & 6/\sqrt{10} & -12/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5/\sqrt{10} & -5/\sqrt{10} \\ 5/\sqrt{10} & 60/\sqrt{10} & 0 \\ -5/\sqrt{10} & 0 & -40/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5/\sqrt{10} & -5/\sqrt{10} \\ 2 & 18/\sqrt{10} & 4/\sqrt{10} \\ -1 & 6/\sqrt{10} & -12/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5/\sqrt{10} & -5/\sqrt{10} \\ 5/\sqrt{10} & 60/\sqrt{10} & 0 \\ -5/\sqrt{10} & 0 & -40/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

この手続きを繰り返す
ことにより、対角行列
となる。

