

## 7.6.3 LR法

$$A = LR$$

三角分解

$$\textcircled{1} \quad A_k = L_k R_k$$

$$\textcircled{2} \quad A_{k+1} = R_k L_k$$

逆順に乗じる

$\textcircled{1}$  に左から  $L_k^{-1}$  を掛ける

$$L_k^{-1} A_k = L_k^{-1} L_k R_k = R_k$$

$$A_{k+1} = L_k^{-1} A_k L_k$$

相似変換



回数

逆順に乗じる

LR分解

0)回目

$$A \Rightarrow A_0$$

$$A_0 = L_0 R_0$$

1)回目

$$R_0 L_0 \Rightarrow A_1$$

$$A_1 = L_1 R_1$$

2)回目

$$R_1 L_1 \Rightarrow A_2$$

$$A_2 = L_2 R_2$$

⋮

⋮

⋮

k)回目

$$R_{k-1} L_{k-1} \Rightarrow A_k$$

$$A_k = L_k R_k$$

k+1)回目

$$R_k L_k \Rightarrow A_{k+1}$$

⋯ ⋯



# 例13 LR法を用いて次の対称 行列の固有値を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{k+1} = R_k L_k$$

---

	$L_k$	$R_k$	$A_{k+1}$
$k = 1$	$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 2.000 & 1.000 & 0.000 \\ 1.000 & 0.333 & 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.000 & 2.000 & 1.000 \\ 0.000 & -3.000 & -1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.000 & 2.333 & 1.000 \\ -7.000 & -3.333 & -1.000 \\ 0.333 & 0.111 & 0.333 \end{bmatrix}$
$k = 2$	$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -1.167 & 1.000 & 0.000 \\ 0.056 & 0.030 & 1.000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.000 & 2.333 & 1.000 \\ 0.000 & -0.611 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 0.273 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.333 & 2.364 & 1.000 \\ 0.722 & -0.606 & 0.167 \\ 0.015 & 0.008 & 0.273 \end{bmatrix}$



$L_k$  $R_k$  $A_{k+1}$ 

$$k = 3 \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.217 & 1.000 & 0.000 \\ 0.005 & 0.002 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.333 & 2.364 & 1.000 \\ 0.000 & -1.118 & -0.050 \\ 0.000 & 0.000 & 0.268 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.850 & 2.366 & 1.000 \\ -0.243 & -1.118 & -0.050 \\ 0.001 & 0.001 & 0.268 \end{bmatrix}$$

$$k = 4 \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.063 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.850 & 2.366 & 1.000 \\ 0.000 & -0.969 & 0.013 \\ 0.000 & 0.000 & 0.268 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.701 & 2.366 & 1.000 \\ 0.061 & -0.969 & 0.013 \\ 0.000 & 0.000 & 0.268 \end{bmatrix}$$

$$k = 5 \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.016 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.701 & 2.366 & 1.000 \\ 0.000 & -0.008 & -0.004 \\ 0.000 & 0.000 & 0.268 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.740 & 2.366 & 1.000 \\ -0.017 & -1.008 & -0.004 \\ 0.000 & 0.000 & 0.268 \end{bmatrix}$$

 $\vdots$  $\vdots$  $\vdots$  $\vdots$ 

$$k = 8 \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.733 & 2.366 & 1.000 \\ 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.268 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.732 & 2.366 & 1.000 \\ 0.000 & -1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.268 \end{bmatrix}$$



## 7.6.4 QR法

$$A = QR$$

三角分解

ユニタリ行列

$$\textcircled{1} \quad A_k = Q_k R_k$$

$$\textcircled{2} \quad A_{k+1} = R_k Q_k$$

逆順に乘じる

相似変換

$$A_{k+1} = Q_k^{-1} A_k Q_k$$



# ユニタリー行列

$Q$  が複素行列であるとき、

$Q^*$  共役転置行列

$Q^*Q = I$  この条件を満足する  $Q$  を  
ユニタリー行列という。

$Q$  実行列ならば直交行列



## 7.6.5 ギブンス(Givens)法

ヤコビの回転行列を用いる

$$B = JAJ^{-1} = JAJ^t$$

ギブンス法は  $a_{i-1,j}$  が零となるよう  
回転角 $\theta$ を定めたもの

$a_{i,j}$  は一意的に  $a_{23}, a_{24}, \dots; a_{2n}, a_{34},$

$a_{35}, \dots; a_{3n}, a_{45}, a_{46}, \dots; a_{n-1,n}$  の順にとる

$A \Rightarrow$  三重対角行列



ギブンス法は  $a_{i-1,j}$  が零

---

$$b_{i,j-1} = a_{j,i-1} \cos \theta - a_{i,i-1} \sin \theta = 0$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_{j,i-1}}{a_{i,i-1}}$$





# ハウスホルダー法

---

- 1) 第  $k$  列の第  $k + 1$  成分以降を  $\mathbf{b}$  とする
- 2)  $s = \pm|\mathbf{b}| = \pm\sqrt{\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}}$  を求める
- 3)  $\mathbf{b}_N = (s, 0, 0, 0, \dots, 0)^t$  を作成する
- 4)  $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{b}_N$  を求める
- 5)  $|\mathbf{u}|^2 = 2\{s^2 + (\mathbf{b} \text{ の第 } 1 \text{ 成分}) \times s\}$  を求める
- 6)  $\mathbf{p} = \mathbf{B}\mathbf{u} / (|\mathbf{u}|^2 / 2)$  を求める

